



Programa de fortalecimiento de competencias de docentes usuarios de dispositivos electrónicos portátiles



Integración de las tabletas al proceso de enseñanza aprendizaje de acuerdo al nivel real - I
Nivel de Secundaria - Matemática

Unidad 1: Conocimientos claves para el desarrollo de las competencias del área de Matemática

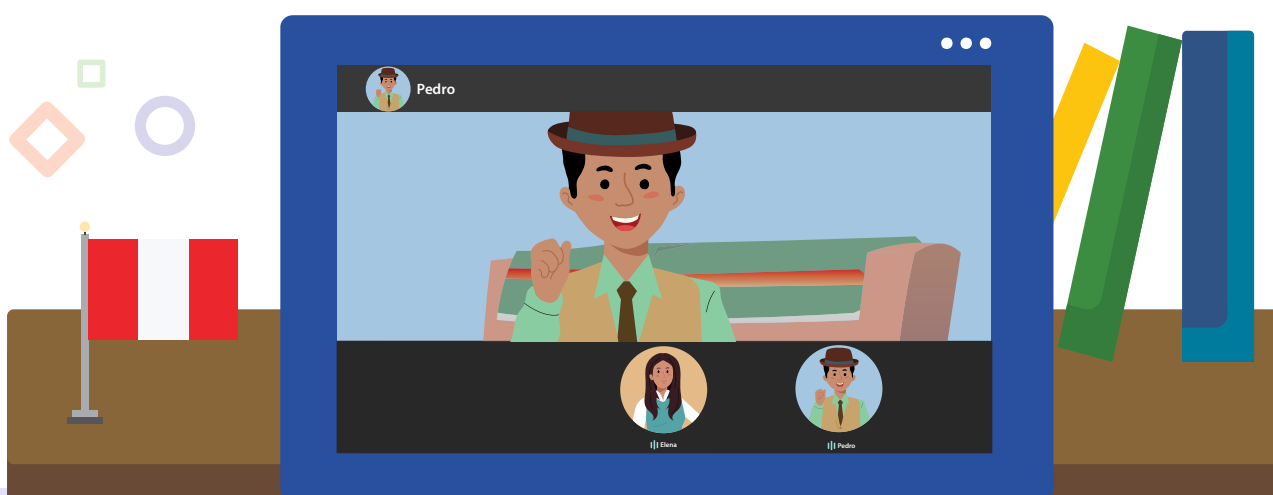


Sesión 2

Principales aspectos del enfoque del área de Matemática



Para iniciar la reflexión sobre el enfoque centrado en la resolución de problemas, partiremos del diálogo de dos docentes acerca del abordaje de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.



Los docentes Marcial y Pedro dialogan sobre las actividades que presentaron a sus estudiantes para el desarrollo de la competencia **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**, para lo cual plantearon los siguientes propósitos que habrían de lograr:

- Establece relaciones entre datos, o variación entre magnitudes, y las transforma a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) sobre funciones cuadráticas. Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática. Emplea estrategias heurísticas, procedimientos y recursos en la resolución de problemas, y justifica la validez de sus resultados mediante ejemplos o propiedades matemáticas.

Marcial: Antes de proponerles las actividades relacionadas con las funciones cuadráticas, realicé la conceptualización de las funciones y sus distintas representaciones (gráficas, simbólicas y tabulares); luego les mostré la forma general de una función cuadrática, les propuse algunos ejemplos para consolidar el aprendizaje para que, a partir de ello, presenten una situación de contexto, la cual fue desarrollada con mi participación.

Pedro: Para abordar el tema, yo les presenté una situación de contexto. Propuse elaborar unas cajas a partir de una cartulina de 20 cm por 20 cm para el envasado de unas chocotejas. La actividad consistió en construir cajas de base cuadrada y determinar cuáles son las dimensiones de la caja que tenga el mayor volumen.

Luego les pedí que expresaran la relación entre el área de la base y el volumen mediante una expresión algebraica y gráfica.



Reflexiona

Después del diálogo presentado, responde la siguiente pregunta:

- Considerando las actividades propuestas por cada uno de los docentes, ¿en cuál de ellos se evidencia más el enfoque centrado en la resolución de problemas? Explica.



1. Enfoque que sustenta el desarrollo de las competencias en el área de Matemática (MINEDU, 2016)¹

El Programa Curricular de Educación Secundaria establece que el enfoque que sustenta el desarrollo de las competencias relacionadas con el área de Matemática corresponde al enfoque centrado en la resolución de problemas, el cual tiene las siguientes características:

- La matemática es un producto cultural dinámico, cambiante, en constante desarrollo y reajuste.
- Toda actividad matemática tiene como escenario la resolución de problemas planteados a partir de situaciones, las cuales se conciben como acontecimientos significativos que se dan en diversos contextos. Las situaciones se organizan en cuatro grupos: situaciones de cantidad; situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; situaciones de forma, movimiento y localización; y situaciones de gestión de datos e incertidumbre.
- Al plantear y resolver problemas, las y los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales no conocen de antemano las estrategias de solución. Esta situación les demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar las dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución. En este proceso, la o el estudiante construye y reconstruye sus conocimientos al relacionar y organizar ideas y conceptos matemáticos que emergen como solución óptima a los problemas, que irán aumentando en grado de complejidad.
- Los problemas que resuelven las y los estudiantes pueden ser planteados por ellos mismos o por el o la docente para promover, así, la creatividad y la interpretación de nuevas y diversas situaciones.
- Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsadoras del aprendizaje.
- Las y los estudiantes aprenden por sí mismos cuando son capaces de autorregular sus procesos de aprendizaje y de reflexionar sobre los aciertos, errores, avances y dificultades que surgieron durante los procesos de resolución de problemas.

1. MINEDU (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. Lima: MINEDU.

El enfoque centrado en la resolución de problemas se nutre de tres fuentes: la educación matemática realista, el enfoque de resolución de problemas y la teoría de situaciones didácticas.

2. Marcos teóricos que sustentan el enfoque centrado en la resolución de problemas

Es el marco teórico y metodológico que orienta la enseñanza y el aprendizaje del área de Comunicación y que se alinea a un enfoque por competencias.

a. Educación matemática realista

¿Qué es la educación matemática realista?

La educación matemática realista –en adelante, EMR– es una teoría de instrucción de dominio específico para las matemáticas, que se ha desarrollado en los Países Bajos. La característica de la EMR es que las situaciones ricas y “realistas” ocupan un lugar destacado en el proceso de aprendizaje. Estas situaciones sirven como una fuente para iniciar el desarrollo de conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos y como un contexto en el que las y los estudiantes pueden, en una etapa posterior, desarrollar sus conocimientos matemáticos, que luego gradualmente se han vuelto más formales y generales y menos específicos del contexto (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014).

La EMR se fundamenta en cuatro principios fundamentales: la matematización, la fenomenología didáctica, el uso de modelos y la reinención guiada.

1. La matematización

Según Freudenthal (1977),² las matemáticas deben tener conexión con la realidad, mantenerse apegadas a la experiencia de los niños y niñas y ser pertinentes a la sociedad, para que tengan valor humano. Es decir, la matemática como una actividad humana. A su vez, Treffers (1978, 1987)³ plantea dos tipos de matematización:

- **La matematización horizontal: en la que las y los estudiantes crean herramientas matemáticas que les ayudan a organizar y resolver un problema dado en una situación de la vida real.**

2. http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2008_guided-tour.pdf
3. http://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Spanish_vdHeuvel_2008_guided-tour.pdf

- La matematización vertical: es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático, es decir, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, simbolización y esquematización con el objetivo de lograr mayores niveles de formalización matemática.

2. La fenomenología didáctica

Paul Drijvers, del instituto Freudenthal, dice que la fenomenología didáctica relaciona objetos de pensamiento matemático con fenómenos en el mundo físico, social o mental (imaginario), y que estos objetos nos pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos de la realidad.

3. El uso de modelos

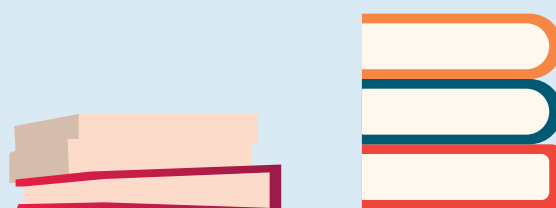
Van den Heuvel-Panhuizen (2003) sostiene que los modelos se ven como representaciones de las situaciones problemáticas, que reflejan aspectos esenciales de conceptos y estructuras matemáticas que son relevantes para la situación misma. Estos modelos van a depender del significado y el papel durante el proceso de aprendizaje, de estar relacionados con la situación y con volverse más generales.



4. La reinención guiada

Paul Drijvers define primero la reinención como la reconstrucción y desarrollo de un concepto matemático de forma natural en una determinada situación, y guiada como la orientación que requieren las y los estudiantes para determinar la convergencia hacia estándares matemáticos comunes. Estas orientaciones pueden provenir de libros, docentes o compañeros.

Consideraremos la propuesta de Ángel Alsina (2009)⁴ para la explicación más resumida de los seis principios de la EMR.



4. <https://www.seiem.es/docs/actas/13/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf>

Principios	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?
De actividad	Las matemáticas se consideran una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema.	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana como a situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos y alumnas puede ser el mundo real, pero esto no es siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.
De niveles	Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: – Situacional: en el contexto de la situación. – Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etcétera. – General: exploración, reflexión y generalización. – Formal: procedimientos estándares y notación convencional.	Esquematización progresiva (profesor) y reinención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.
De reinención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que las y los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre las y los estudiantes y entre estos y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás, y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales de las y los estudiantes son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
De interconexión	Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría, ...) no pueden ser tratados como entidades separadas.	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

b. Aportes de Shoenfeld sobre el enfoque de resolución de problemas⁵

Shoenfeld (1985) propone que para resolver problemas se debe relacionar estrategias heurísticas y desarrollar el pensamiento matemático. En ese sentido, establece que aprender a pensar matemáticamente involucra no tanto tener una gran cantidad de conocimientos de una determinada materia cuanto ser flexible, dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas. El mismo autor (Shoenfeld, 1992) afirma que “las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea, el proceso de hacer matemática es más que cálculos y deducciones, involucra las observaciones de patrones, la prueba de conjetura, la estimación de resultados” (p. 343).

c. Aportes de la teoría de las situaciones didácticas⁶

A continuación, te presentamos algunas ideas claves tomadas sobre los aportes de las situaciones didácticas.

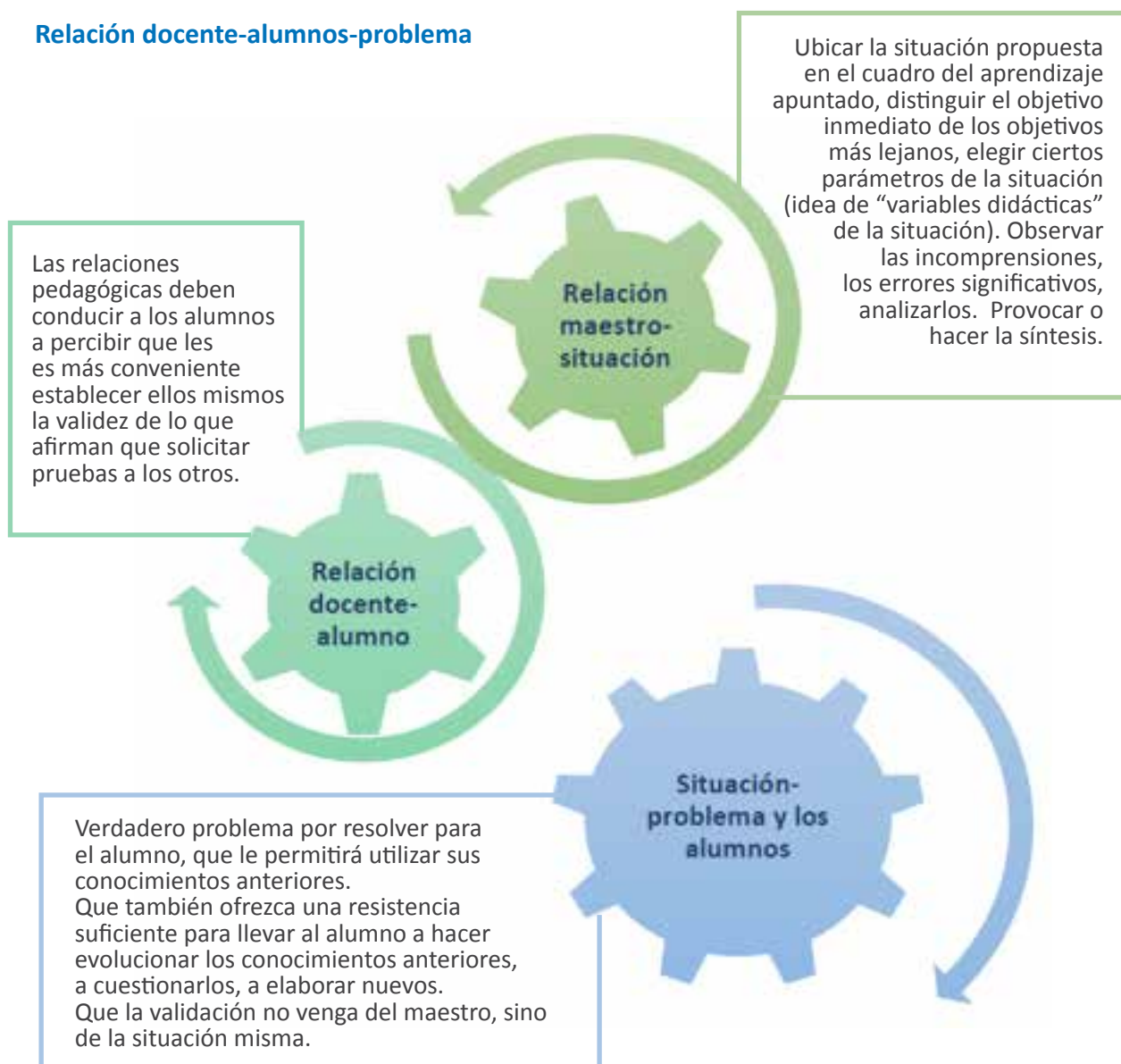
- Producir conocimientos supone establecer nuevas relaciones, transformar y organizar otras. Implica validarlos, según las normas y procedimientos matemáticos.
- Implica tomar posición respecto del aprendizaje, de la enseñanza, del conocimiento matemático, de la relación entre conocimiento matemático de la escuela y el que se produce fuera de ella.
- Se produce a partir de una situación fundamental que representa la problemática que permite emerger dicho conocimiento. El conocimiento aparece como estrategia para resolver el problema involucrado.
- Se produce a partir de dos interacciones básicas: a) interacción del alumno o alumna con una problemática que pone en juego los conocimientos matemáticos, y b) la interacción del docente o la docente con el alumno a propósito de la problemática matemática.
- La construcción de la significación de un conocimiento debe ser considerada en dos niveles: nivel “externo” (campo de utilización de este conocimiento y sus límites) y nivel “interno” (cómo y por qué funciona tal herramienta; por ejemplo, cómo funciona un algoritmo).

5. MINEDU. (2019). Módulo II: *Competencias y estándares de aprendizaje*. Programa de Formación Docente Secundaria. Lima: MINEDU.

6. MINEDU. (2019). Módulo II: *Competencias y estándares de aprendizaje*. Programa de Formación Docente Secundaria. Lima: MINEDU.



Relación docente-alumnos-problema



3. La mediación docente en el desarrollo de las competencias relacionadas con el área de Matemática

En el capítulo VI de las *Orientaciones pedagógicas para el desarrollo de competencias* que se presenta en el Currículo Nacional de la Educación Básica se señala:

Mediar el progreso de los estudiantes de un nivel de aprendizaje a otro superior: La mediación del docente durante el proceso de aprendizaje supone acompañar al estudiante hacia un nivel inmediatamente superior de posibilidades (zona de desarrollo próximo) con respecto a su nivel actual (zona real de aprendizaje), por lo menos hasta que el estudiante pueda desempeñarse bien de manera independiente. De este modo, es necesaria una conducción cuidadosa del proceso de aprendizaje, en donde la atenta observación del docente permita al estudiante realizar tareas con distintos niveles de dificultad”.⁷

7. MINEDU. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima: MINEDU.

Según Tobón (2018), la mediación didáctica se da cuando el docente está apto para desarrollar, movilizar y llevar el aprendizaje de las figuras educativas para aprender con autonomía, reflexión y creación. Es decir, promover en los otros el compromiso y responsabilidad de formarse y apropiarse del entorno, sin dejar sus intereses, cultura, lengua, etcétera, ni buscar que todos tomen el mismo camino para enfrentar y resolver los desafíos actuales.

A partir de las definiciones dadas, podemos decir que para que se dé una adecuada mediación en un proceso de aprendizaje es necesario, primero, identificar las necesidades de aprendizaje y potencialidades que poseen o requieran las y los estudiantes. Para ello es importante elaborar un diagnóstico que nos permita identificar en qué nivel respecto al desarrollo de la competencia se encuentran los estudiantes, lo que nos permitirá identificar los estilos de aprendizaje, las creencias, las habilidades y los conocimientos con que cuentan las y los estudiantes. A partir de ello, se realiza el diseño o planteamiento de situaciones de aprendizaje con actividades que permitan que las y los estudiantes puedan lograr el nivel requerido para el grado en el que se encuentran.

Otro punto que también debemos tener en cuenta en la mediación de un proceso de aprendizaje es sobre la práctica docente. Al respecto, Jeremy Kilpatrick (1998)⁸ hace referencia a que el interés de las y los investigadores se ha volcado hacia cómo los docentes manifiestan sus conocimientos y sus creencias en el proceso de aprendizaje; y, por otro lado, hacia cómo las y los estudiantes aprenden y comprenden aspectos específicos de las matemáticas. Así mismo, nos dice que para que se dé un proceso de aprendizaje de un conocimiento matemático debe estar inmerso dentro de un contexto. También manifiesta que uno de los trabajos más delicados del docente es el de mediar el progreso de los aprendizajes de las y los estudiantes, y esto debe darse partiendo de sus errores y concepciones deficientes hacia un conocimiento formal que pueda ser validado matemáticamente.

Respecto a los errores, Luis Rico (1998)⁹ dice que ellos son parte de las producciones de los estudiantes durante un proceso de aprendizaje. Estos errores constituyen una información importante para el docente, ya que a partir de ellos podrá realizar una adecuada mediación para el logro de los propósitos planteados. En este sentido, es importante que las y los docentes aprendan a realizar la observación del trabajo matemático de las y los estudiantes, teniendo en cuenta lo siguiente (tomado de Brousseau, Davis y Werner, citados por Luis Rico):

- ▶ Proporcionar a los estudiantes una oportunidad para ver lo que conocen y lo que pueden inventar o descubrir con antelación a enseñarles un método, técnica o concepto supuestamente novedoso.
- ▶ No dejar a la casualidad la creación de las representaciones mentales de los estudiantes. Se pueden proporcionar experiencias para los estudiantes que influirán considerablemente en las representaciones mentales que ellos construyan mentalmente.
- ▶ Mediante las relaciones de comunicación con los estudiantes, el docente puede conocer las representaciones mentales que los estudiantes están empleando.

8. Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. https://www.researchgate.net/publication/278009025_Educacion_Matematica_Errores_y_dificultades_de_los_estudiantes_Resolucion_de_problemas_Evaluacion_Historia

9. Kilpatrick, J., Gómez, P. & Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. https://www.researchgate.net/publication/278009025_Educacion_Matematica_Errores_y_dificultades_de_los_estudiantes_Resolucion_de_problemas_Evaluacion_Historia



Dentro de un proceso de aprendizaje, parte de la mediación docente implica conocer cuáles son las tipologías de errores que comúnmente las y los estudiantes cometen. Luis Rico (1998)¹⁰ indica que en una investigación más reciente sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en matemáticas, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los estudiantes realizado por expertos. De acuerdo con la metodología propuesta, determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

2. Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada; también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

3. Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, incorrectamente, los cuantificadores; o, también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

10. Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. https://www.researchgate.net/publication/278009025_Educacion_Matematica_Errores_y_dificultades_de_los_estudiantes_Resolucion_de_problemas_Evaluacion_Historia

4. Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.

5. Falta de verificación de la solución. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado, el error habría podido evitarse.

6. Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.



Después de haber leído y reflexionado sobre lo presentado en esta primera sesión, te invitamos a resolver el cuestionario de autoevaluación.



1. Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles en los que los contextos y los modelos poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva. Corresponde a las ideas centrales de la:

- a. Teoría de las situaciones didácticas
- b. Teoría sobre la resolución de problemas
- c. Educación matemática realista
- d. La resolución de problemas matemáticos



2. El contexto de los problemas que se presentan las y a los estudiantes puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que de modo progresivo se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos. Corresponde a uno de los principios de la educación matemática realista de:

- a. Principio de actividad
- b. Principio de realidad
- c. Principio de niveles
- d. Principio de reinversión guiada



3. Al resolver una situación que involucra ecuaciones en el ejemplo:

$$\frac{a(2) + 5}{2} = \frac{-\frac{1}{2} - a(2)}{-5}$$

$$\frac{2a + 5}{2} = \frac{5}{\frac{1}{2} + 2a}$$

$$1a + a + \frac{5}{2} + 10a = 10$$

Se puede observar que el o la estudiante extrae el signo negativo del segundo término de la igualdad, invierte la fracción y elimina el signo.

Lo que aplicó incorrectamente fue la propiedad

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Corresponde al tipo de error de:

- a. Interpretación incorrecta del lenguaje
- b. Datos mal utilizados
- c. Inferencias no válidas lógicamente
- d. Falta de verificación en la solución



4. Producir conocimientos supone establecer nuevas relaciones, transformar y organizar otras; implica validarlos según las normas y procedimientos matemáticos. Es una idea clave que aporta:

- a. Teoría de las situaciones didácticas
- b. Teoría sobre la resolución de problemas
- c. Educación matemática realista
- d. La resolución de problemas matemáticos



5. Se presenta la siguiente situación a las y los estudiantes para el desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio: "Se tiene 100 árboles de plátanos.



El primer árbol produce un racimo de plátanos, el segundo árbol produce tres racimos de plátanos, el tercer árbol produce 5 racimos de plátanos, el cuarto árbol produce 7 racimos de plátanos, y así sucesivamente hasta llegar al árbol de plátano de lugar cien”.

- a. Teoría de las situaciones didácticas
- b. Teoría sobre la resolución de problemas
- c. Educación matemática realista
- d. La resolución de problemas matemáticos

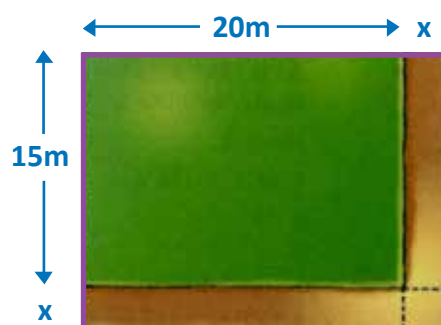
Caso 1

Considerando el enfoque centrado en la resolución de problemas, el profesor de 4.º ‘A’ de secundaria plantea la siguiente situación para movilizar las capacidades de sus estudiantes.

Extender el césped

El césped del jardín del Sr. Jones mide 15 por 20 m. El Sr. Jones decide extender el césped. A dos lados agrega una vereda de igual ancho de x m (vea la figura).

- a) ¿El área del césped agrandado está representada por $A=x^2+35x+300$?
- b) ¿El nuevo césped tiene una superficie de $374mx^2$?
Establece una ecuación y calcula el ancho de la vereda.

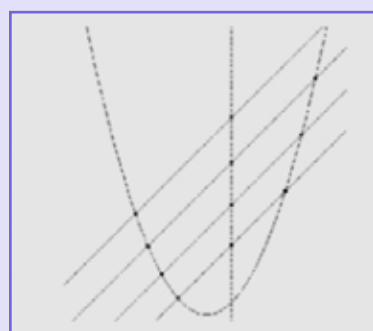
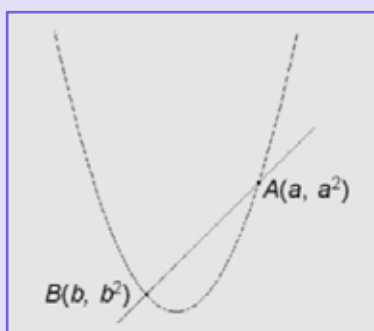


Caso 2

Considerando el enfoque centrado en la resolución de problemas, el profesor de 4.º ‘C’ de secundaria plantea la siguiente situación: presenta el gráfico de una parábola.

El profesor indica que la situación planteada se ajusta a las características del enfoque centrado en la resolución de problemas.

Cortar una parábola



Una parábola está cruzada por una línea recta que la corta en dos puntos: A y B. Esta línea recta se mueve hacia arriba. El punto medio del segmento AB de la línea recta se intersecta sobre una línea vertical, y esta parece moverse sobre una línea vertical. Justifica la afirmación dada.

¿Cuál de las situaciones planteadas es una situación de contexto real que corresponde a la EMR?

3. De acuerdo con el texto presentado sobre la mediación docente en el desarrollo de las competencias relacionadas con el área de Matemática, plantea dos actividades en las que has identificado algunos errores en las producciones o evidencias de tus estudiantes. Y cómo ha sido tu proceso de mediación.