# Curso Iberoamericano de formación permanente de profesores de matemática

## GeoGebra II

## Estudio y representación de funciones

## Aplicaciones al cálculo

# GeoGebra II

# Estudio y representación de funciones. Aplicaciones al cálculo

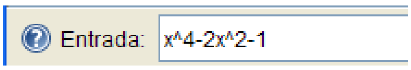
*Contenido de este documento:*

*Representación de funciones*
*Representación de funciones definidas por intervalos*
*Representación de otros tipos de funciones*
*Estudio de una función*
*Inecuaciones*
*Actividades propuestas I*
*Aplicaciones al análisis y al cálculo*
*Cálculo diferencial*
*Polinomios de Taylor*
*Polinomio de interpolación*
*Integración*
*Cálculo de límites*
*Series numéricas*
*Actividades propuestas II*

## Representación de funciones

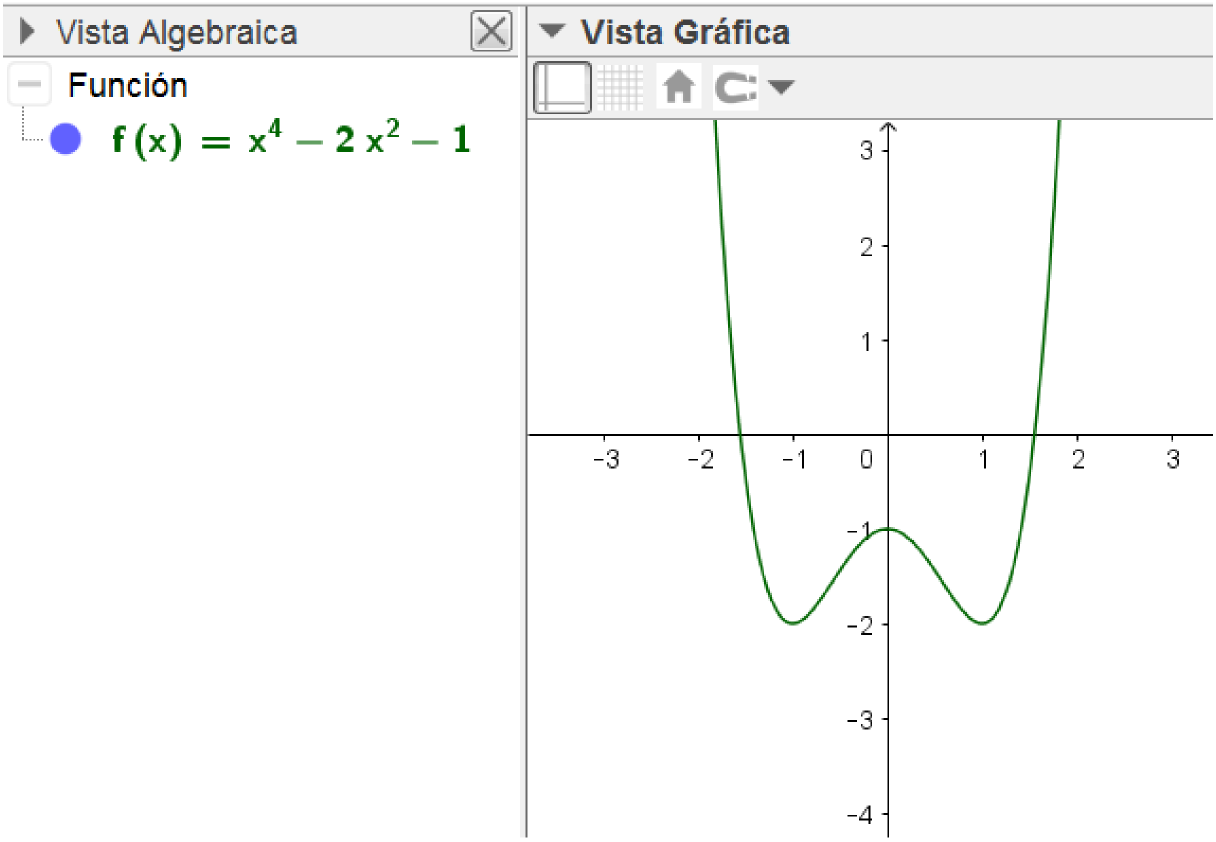
Como ya indicamos en la introducción de la primera parte de Geogebra, este programa es mucho más que un programa de geometría dinámica por lo que constituirá un excelente recurso para estudio y representación de funciones.

Para obtener la gráfica de una función **y = f(x)** basta con introducir la expresión a través de la línea de comandos.




El programa le asignará un nombre, en este caso f(x) cuya ley de formación aparecerá en la **Vista algebraica** y su representación en la **Vista gráfica**.

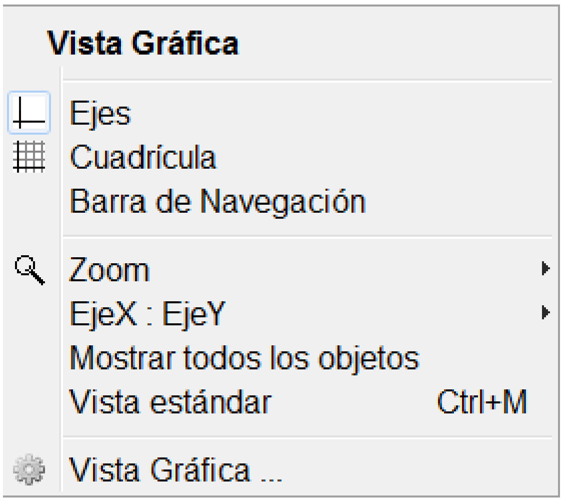
Obtendremos al pulsar **Enter** la gráfica de la función:




En ocasiones, será necesario ajustar la escala de representación para cada uno de los ejes o realizar acciones de zoom para lograr una mejor visión de la función representada.

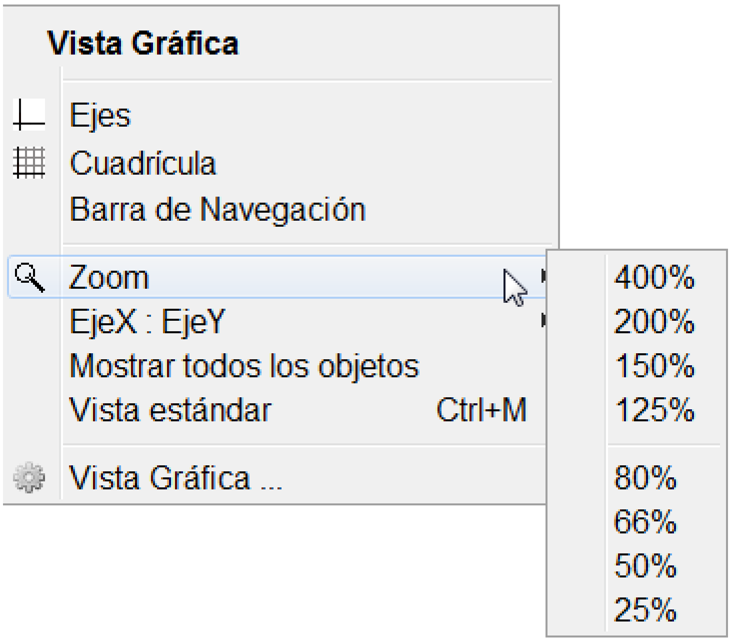
Para conseguir estas acciones, disponemos de las opciones necesarias a las que se accede pulsando el botón derecho del ratón en un lugar libre de la **Vista gráfica**.

Aparecerá el menú siguiente:

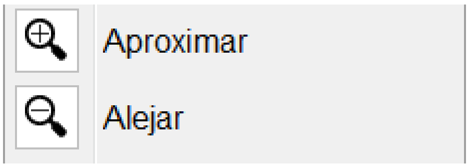



Podemos observar que aparecen las opciones **Zoom** y **EjeX:EjeY**.

La primera permite ampliar o reducir la vista gráfica. Las opciones que aparecerán al pulsar sobre esta opción aparecen en la imagen siguiente:

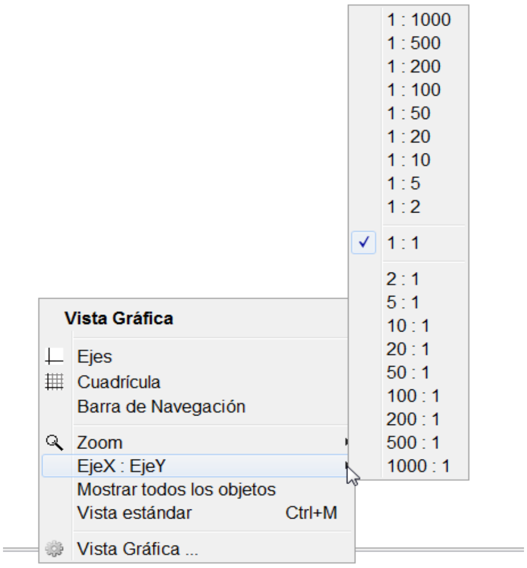



Recordemos que también podemos hacer un zoom para acercar o alejar la imagen con ayuda de la rueda del ratón o pulsando sobre las herramientas:



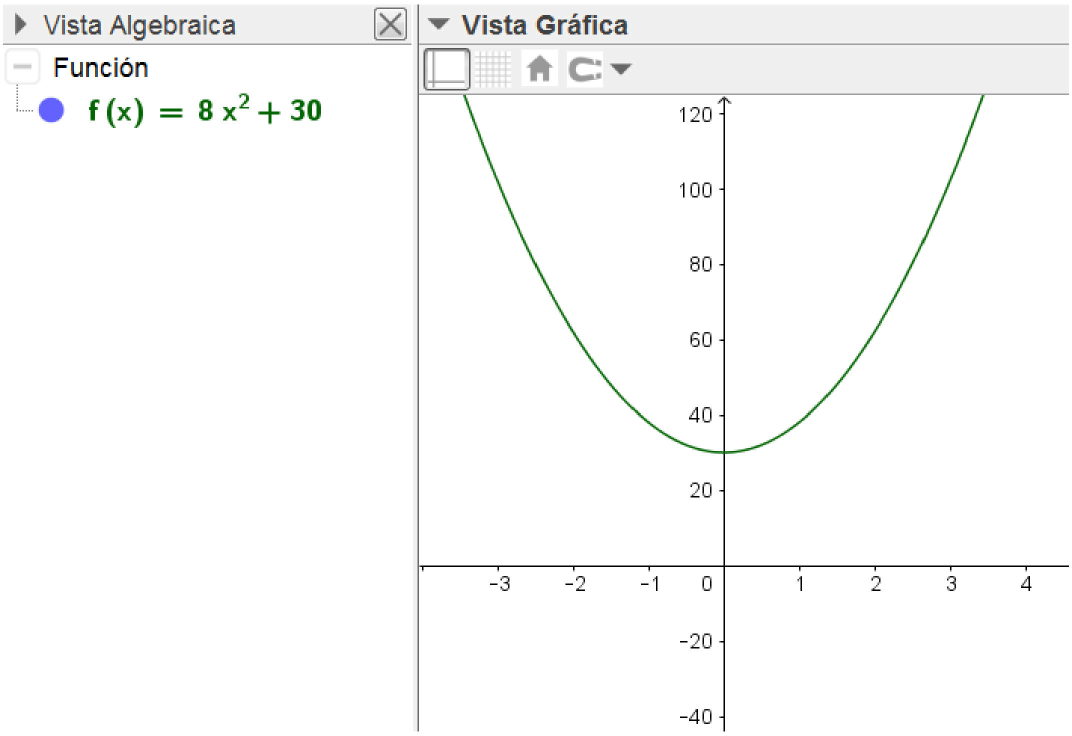

No hay problema en hacer cualquier zoom ya que podemos volver a la vista por defecto pulsando la opción **Vista Estándar** disponible en el menú anterior.

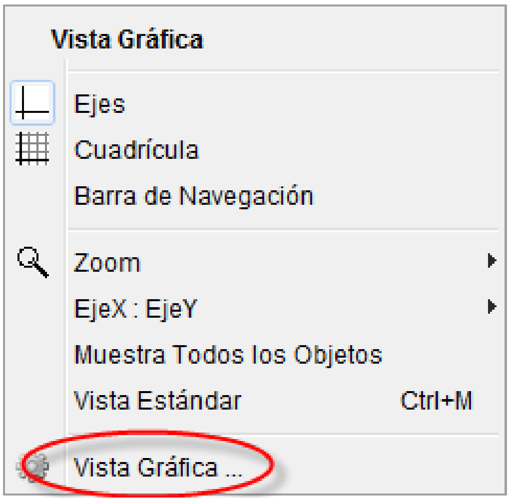
Para cambiar la relación de escala entre los ejes, al pulsar sobre la opción **EjeX:EjeY** aparecerá un nuevo menú desplegable para selecciona la nueva relación entre los ejes X e Y (por defecto es 1:1).




Por ejemplo, si intentamos representar la función $f(x) = 8x^2 + 30$, comprobaremos que no aparece la representación de la función cuadrática, por lo que es necesario ajustar valores en los ejes para visualizar la parábola. Esto que parece un gesto automático es muy importante ya que nos obliga y por tanto, también a nuestro alumnado, a interpretar la expresión para determinar el rango de valores o la variación que sufre la función.

Por ejemplo, si seleccionamos una escala 1:20 conseguiremos que aparezca la función tal y como aparece en la imagen siguiente:

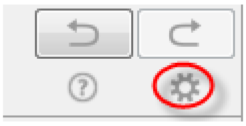




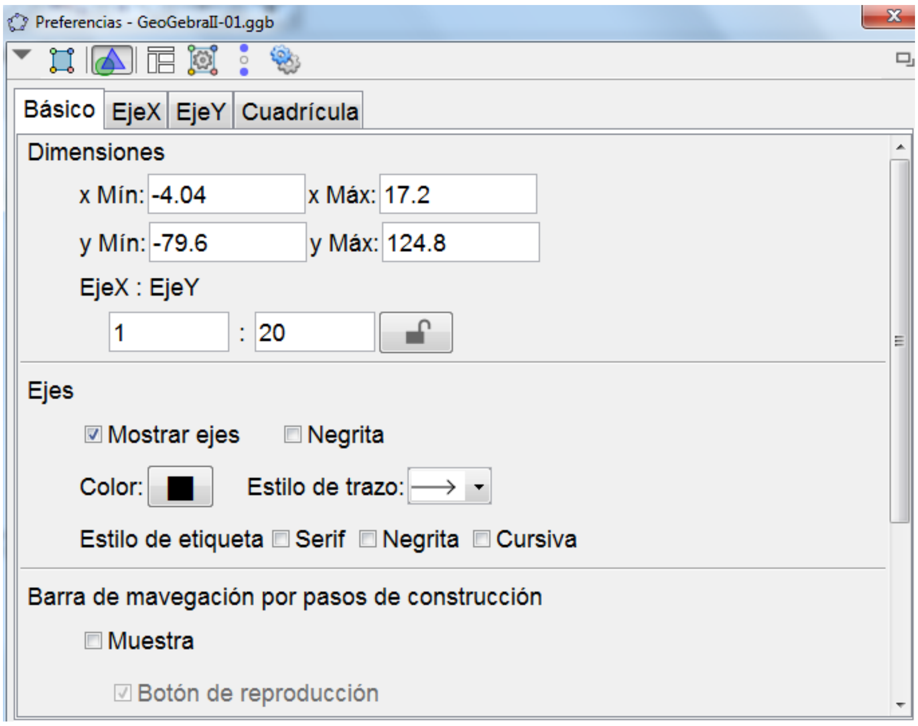

El rango de valores de los ejes se ajusta de manera automática al zoom elegido y a la escala seleccionada en las opciones anteriores, aunque como ocurre en GeoGebra, todo es modificable para ajustarlo a nuestras necesidades.

Así, para establecer un rango de valores para la representación de los ejes hay que acceder a la opción **Vista gráfica** en el menú que aparece al pulsar el botón derecho del ratón en un espacio libre de esta vista.

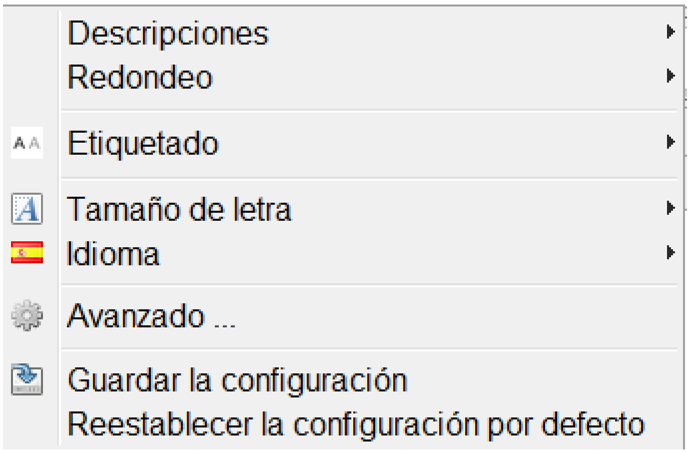
El segundo botón que encontramos en la parte superior corresponde a **Preferencias-Vista gráfica**



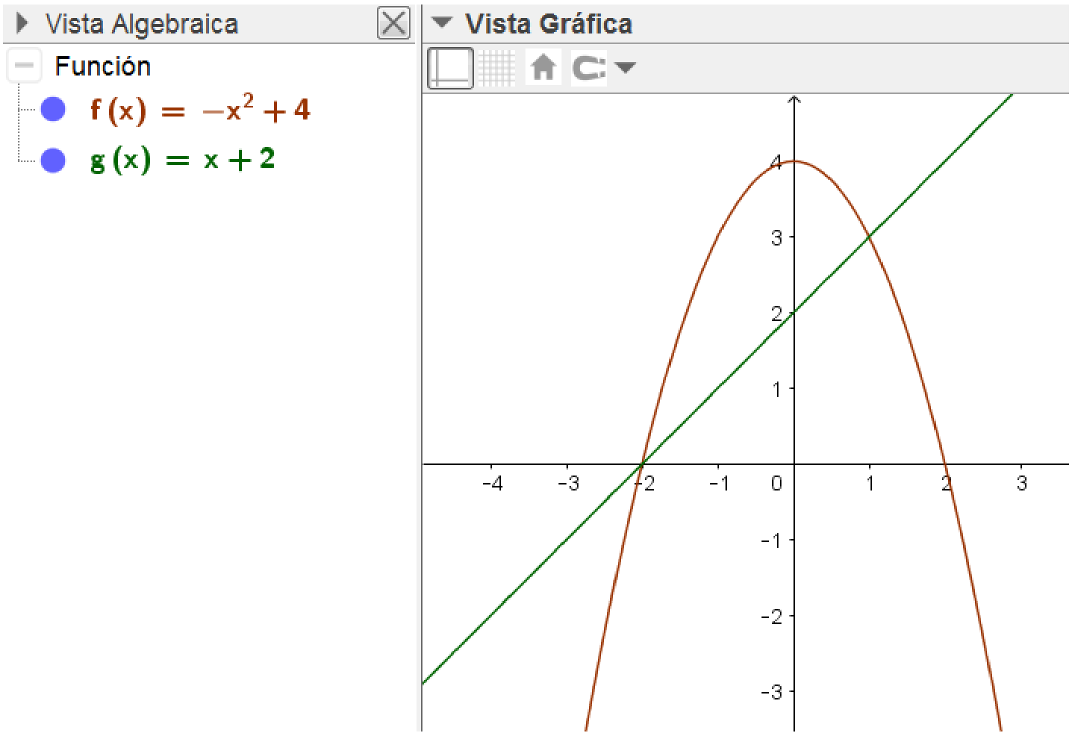
Este botón permite modificar los valores, escalas y características de los ejes y de la cuadrícula.



También se podrá acceder a las opciones anteriores a través de **Avanzado** en el menú **Opciones**.

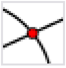


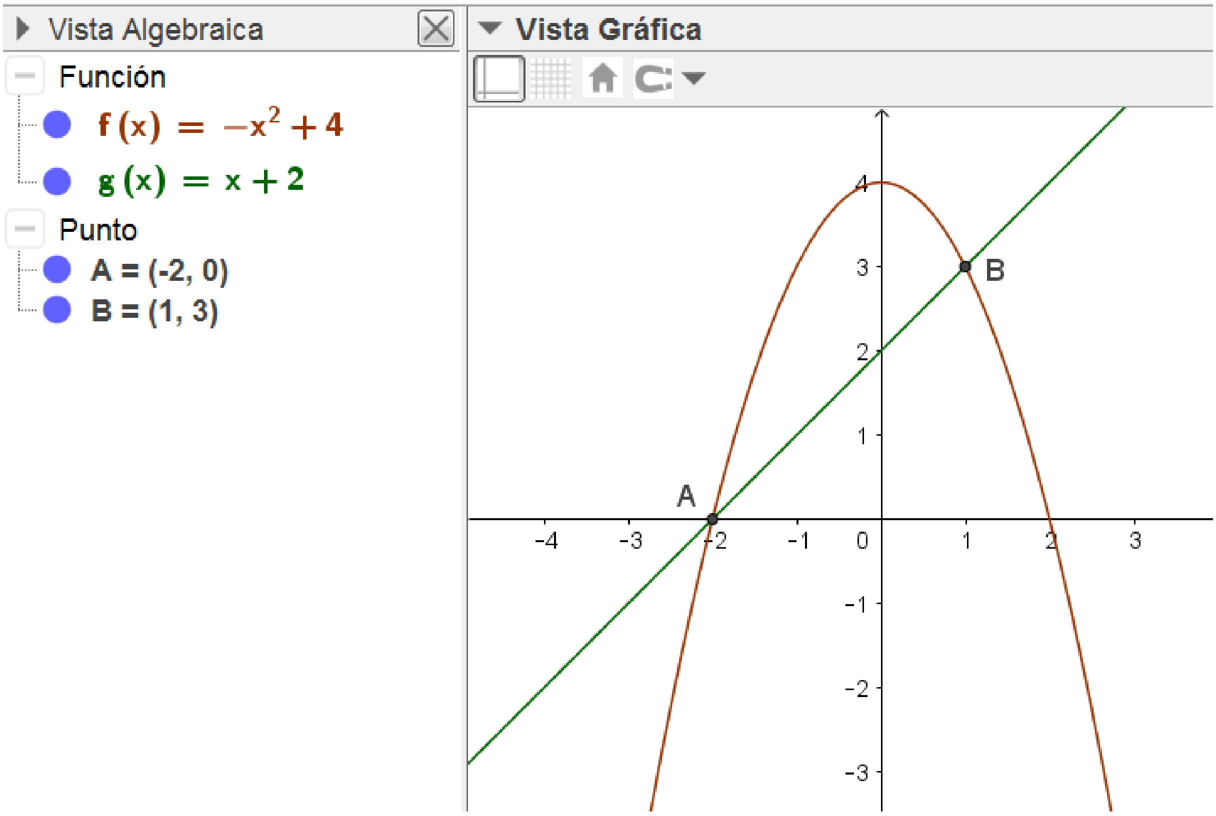

No existe una sintaxis especial para representar de manera simultánea varias funciones ya que basta con representarlas de una en una, ocultando o mostrando aquellas que en cada momento consideremos necesarias.




En las funciones representadas se podrán estudiar sus elementos a través de distintos comandos y opciones disponibles en GeoGebra

Por ejemplo se podrán calcular los puntos de intersección de dos funciones ya que GeoGebra considera a cada una de ellas como un objeto al que se pueden aplicar las distintas herramientas disponibles.

En este caso, bastará con seleccionar la herramienta **Intersección**  para obtener las coordenadas de los puntos de corte entre la parábola y la recta representadas.

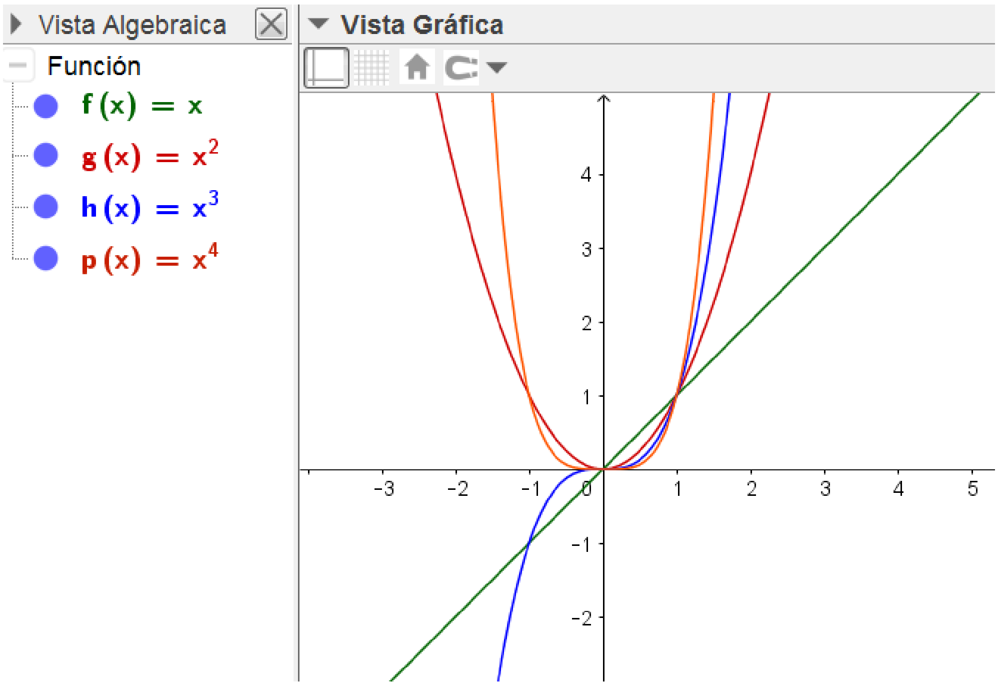



**Ejemplo 1**

*Representar las funciones: y = $x^n$, para n = 1, 2, 3, 4.*

Para obtener la representación de las funciones anteriores, introducir una a una las cuatro expresiones ya que al pulsar **Enter** irán apareciendo en la vista gráfica.

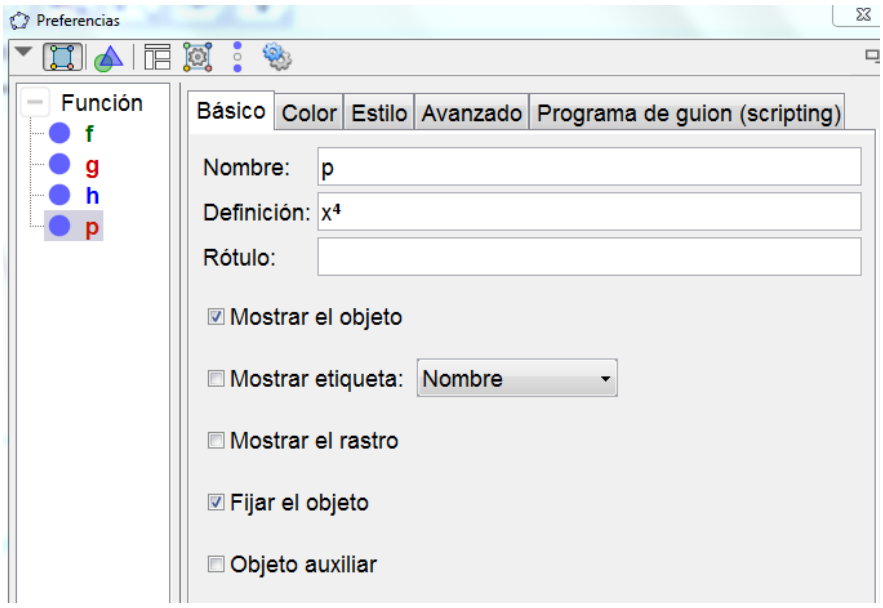
Los exponentes se pueden introducir pulsando la tecla **Alt** y el número correspondiente al exponente.



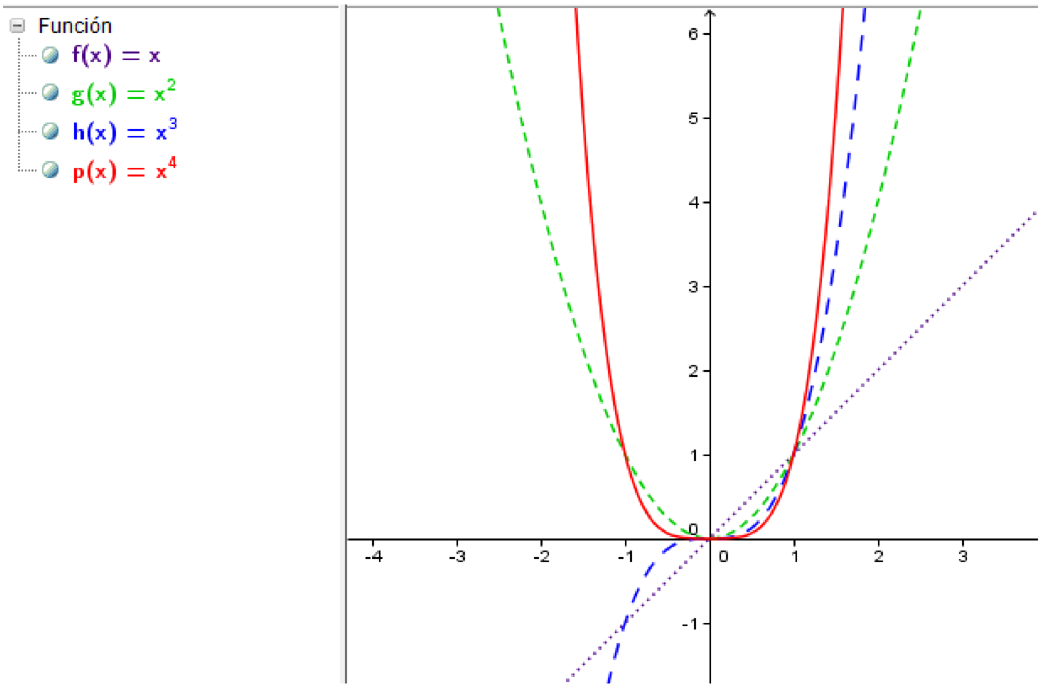

Para mejorar la vista obtenida de las cuatro funciones podemos recurrir a la herramienta zoom o ajustar la escala de valores de los ejes.

Además, para cada una de las funciones podemos establecer sus propiedades para cambiar el color, grosor o trazo; todo ello a través del menú **Propiedades de objeto** al que se accede pulsando el botón derecho sobre la representación de la función en la vista gráfica o sobre la expresión de la función en la vista algebraica.

Aparece el menú de opciones siguiente:



Al cambiar el color y el estilo obtendremos una nueva representación de las funciones, tal y como aparece en la imagen siguiente:




También se podrá cambiar el aspecto de cada una de las funciones y en general de cualquier objeto, pulsando sobre la punta de flecha que aparece junto a **Vista gráfica** 

para que aparezcan las opciones para establecer las características del objeto previamente seleccionado.



Cuando las expresiones de las funciones que se desean representar siguen alguna relación, como es el caso anterior, disponemos del comando

Secuencia para generar de manera automática la lista correspondiente a las leyes de formación y por tanto, también su representación gráfica.

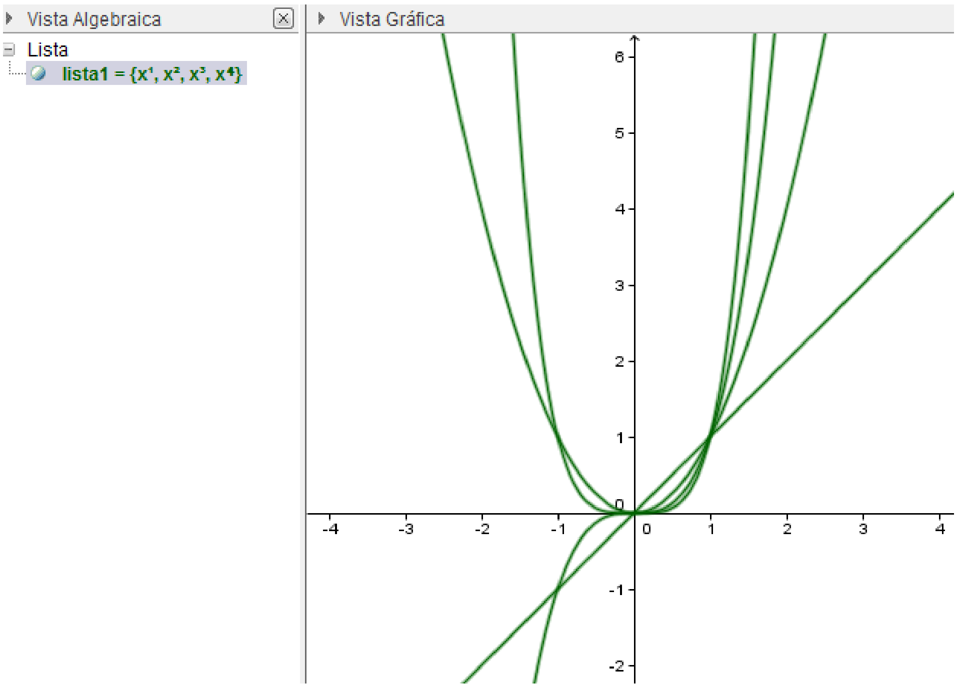
La sintaxis de este comando es:

**Secuencia(expresión, variable, valor inicial, valor final, incremento)**

Para las funciones anteriores, escribiremos en la línea de entrada la expresión siguiente:

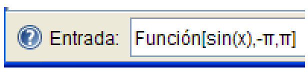
Secuencia(x^n,n,1,4)

El resultado será la lista compuesta por las expresiones {x, $x^2$, $x^3$, $x^4$} y la representación de las cuatro funciones.

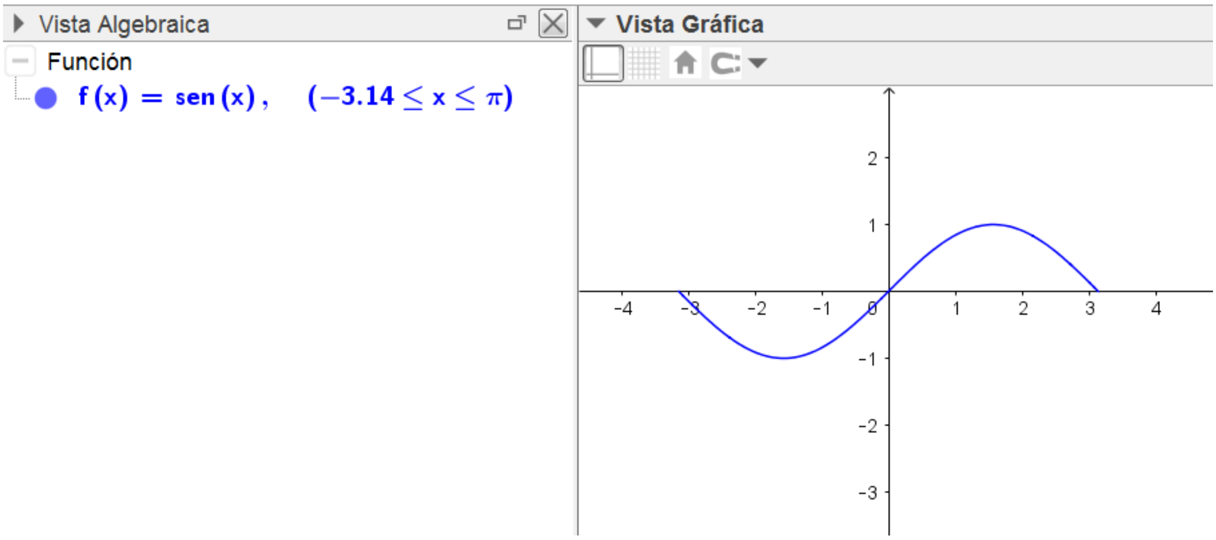



Además, para limitar la representación de una función para valores de la variable independiente dentro de un intervalo ($x_1$, $x_2$) disponemos del comando **Función**, cuya sintaxis es:

**Función(f(x), $x_1$, $x_2$)**

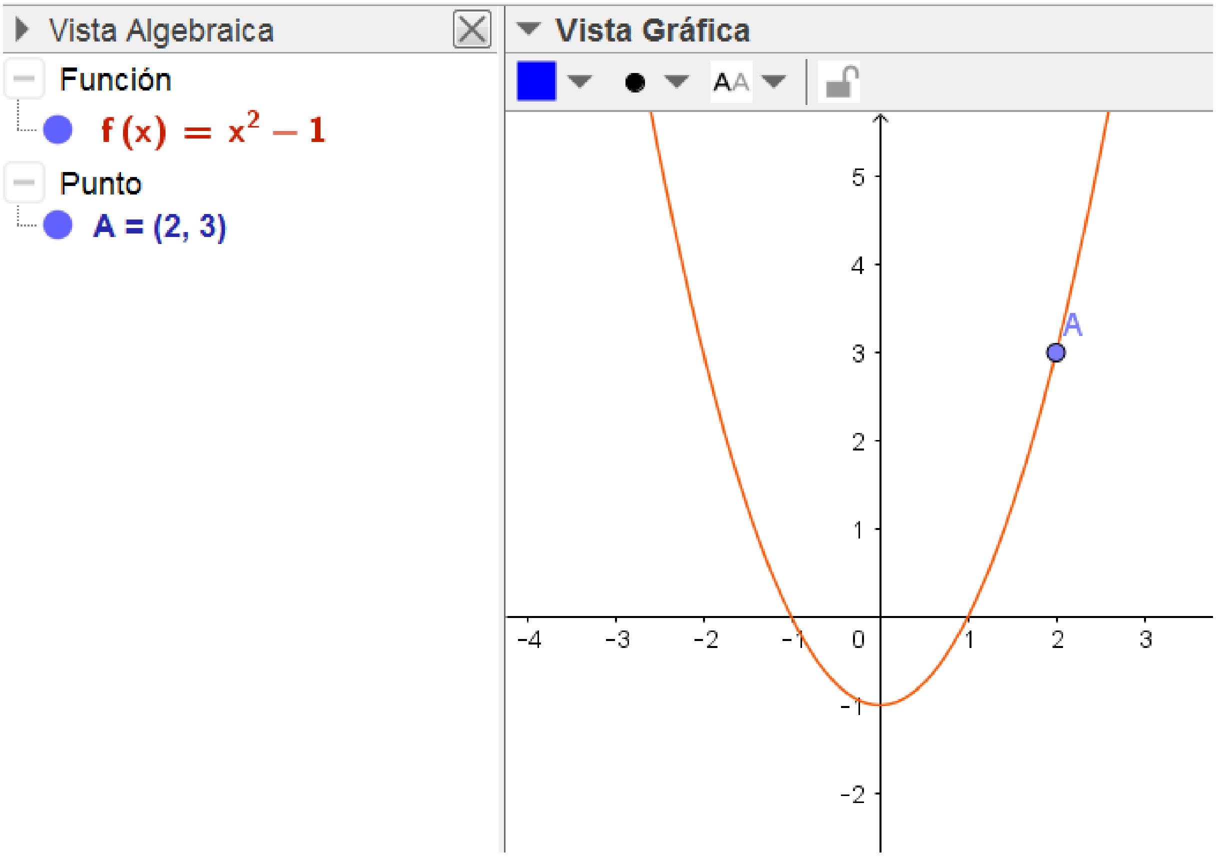



Obteniendo la imagen siguiente:




Utilizando la herramienta **Punto** se puede crear un punto sobre una función previamente representada.

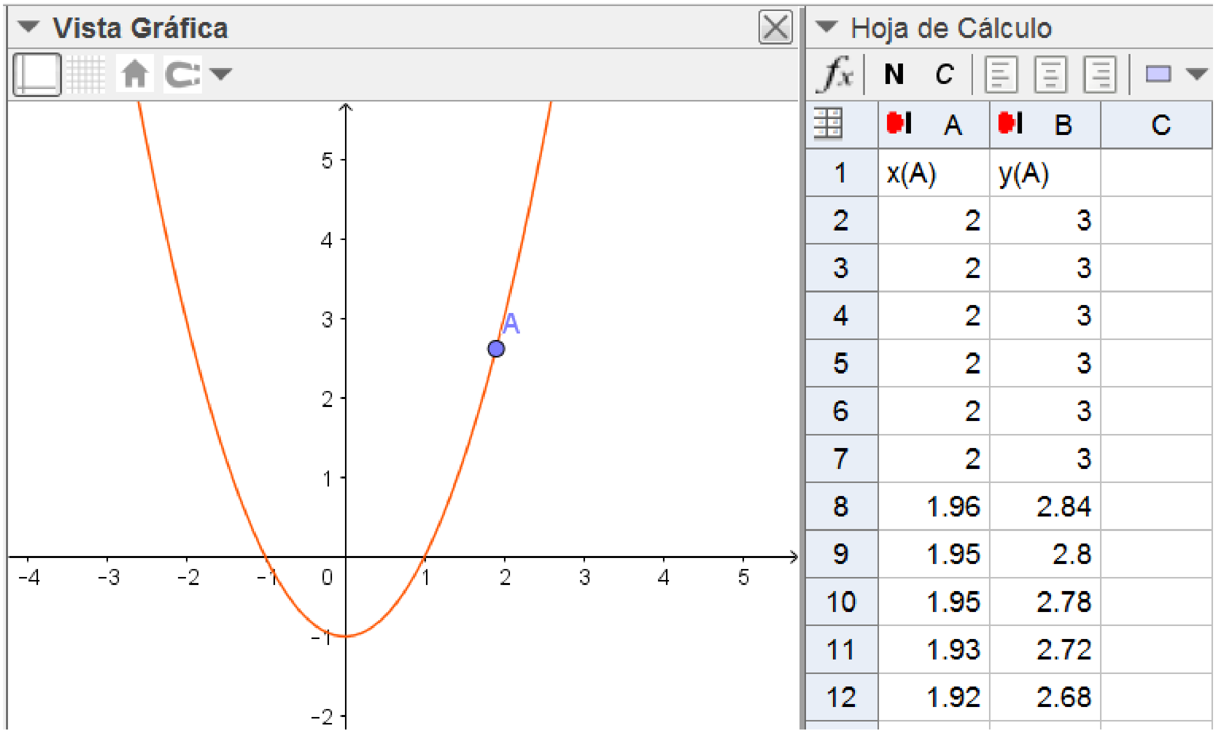
Las coordenadas del punto aparecerán en la vista algebraica. Además, el punto se podrá desplazar sobre la función de manera manual o automática, activando en este caso la Animación automática, para recorrerla.




Con los elementos anteriores, se podrá construir una tabla de valores que se recogerá en la vista de hoja de cálculo.

Para ello, activamos la hoja de cálculo a través de la opción disponible en el menú **Vista**.


Ya solo nos queda seleccionar la herramienta **Registro en hoja de cálculo** que aparecerá al pulsar el botón derecho del ratón sobre el punto A. Al mover el punto A, sus coordenadas se registrarán en dos columnas de la hoja de cálculo, cuyas cabeceras serán x(A) que corresponde a los valores de la abscisa e y(A) que serán los valores de la ordenada.

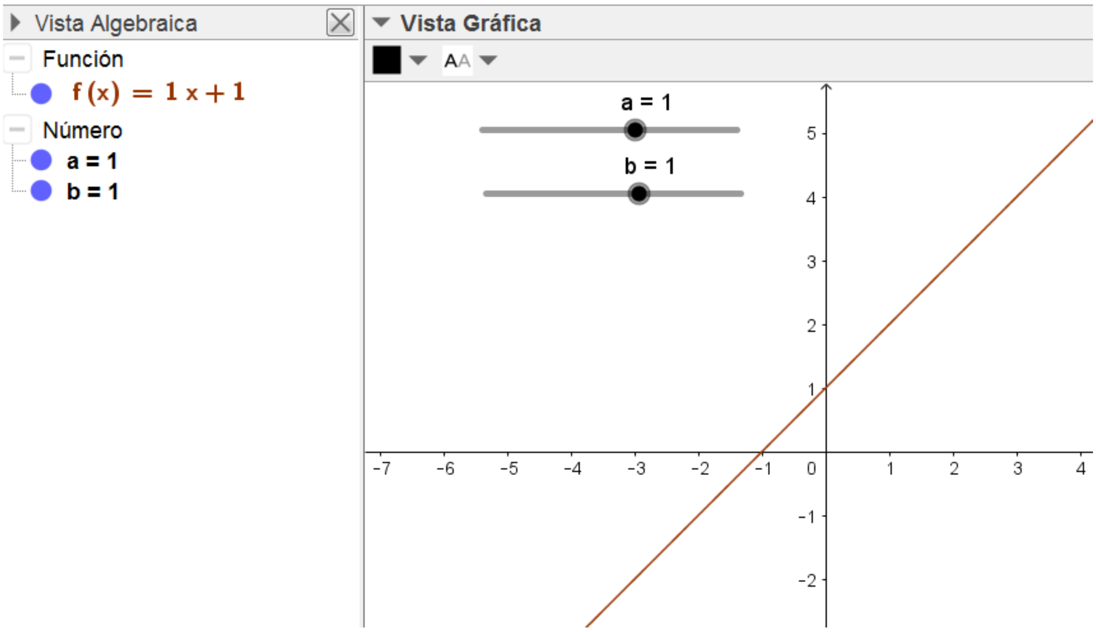


## Ejemplo 2

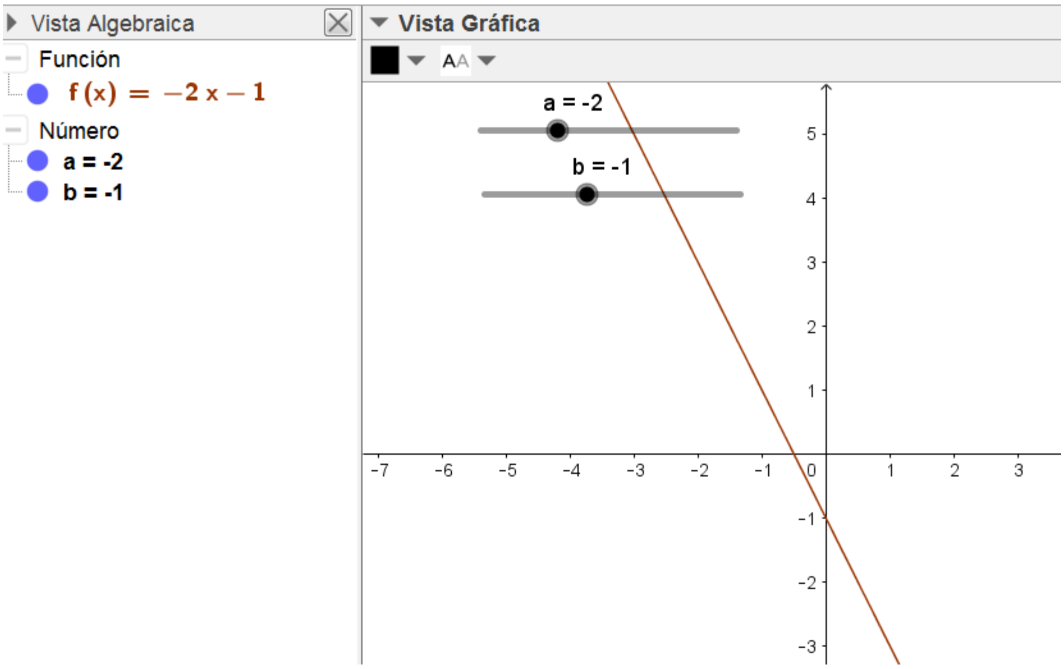
*Estudiar las variaciones de la pendiente y la ordenada en el origen en la función afín.*

Comenzamos introduciendo dos deslizadores *a*, *b* y una función afín genérica $f(x) = a\,x + b$

Aparecerá la gráfica de la función afín para los valores a=1 y b=1.




Al variar los valores del deslizador podemos observar las variaciones de la gráfica cuando cambia la pendiente y la ordenada en el origen.



Observemos que con pocas instrucciones se conseguirá un buen recurso y sobre todo visual para mostrar el significado de la pendiente y la ordenada en el origen en una función afín, con la ventaja de la interactividad de manera que al variar los deslizadores comprobaremos cómo afectan dichos valores a la representación de la función.

## Representación de funciones definidas por intervalos

Para representar una función definida por intervalos será necesario utilizar el comando condicional **Si**, cuya sintaxis es:

**Si(condición, acción)**

En este caso realiza la acción indicada si la condición es verdadera.

Y cuando escribimos:

**Si(condición, acción_1, acción_2)**

realizará la **acción_1** cuando la condición es verdadera y en caso contrario, ejecutará la **acción_2**.

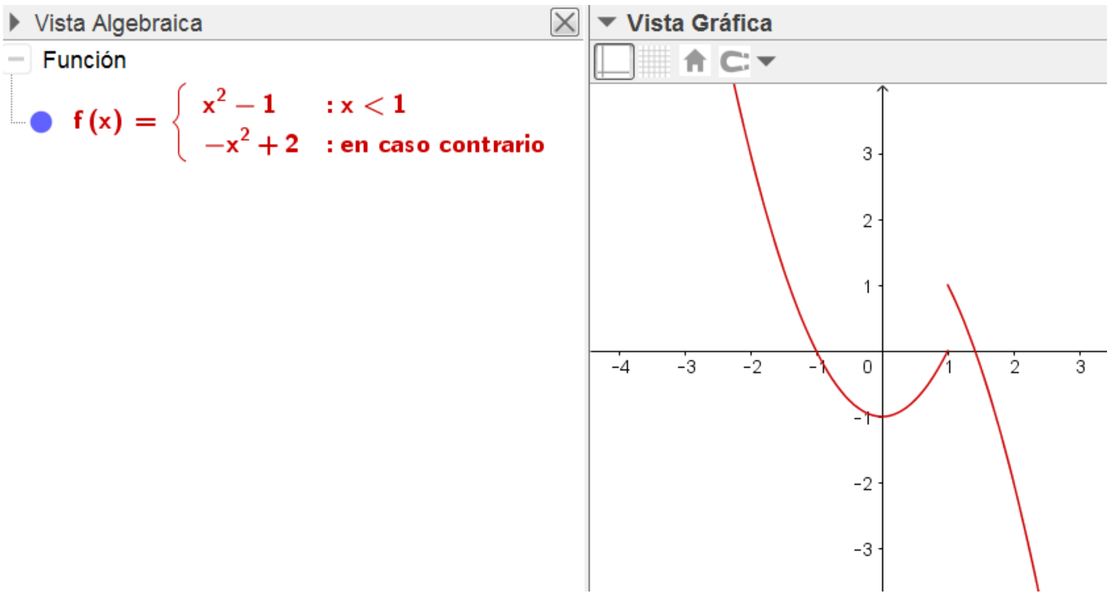
Por ejemplo, para representar la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < 1 \\ -x^2 + 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Escribiremos en la línea de entrada la expresión:

**Si(x<1,x^2-1,-x^2+2)**

Obteniendo la gráfica que aparece en la imagen siguiente:



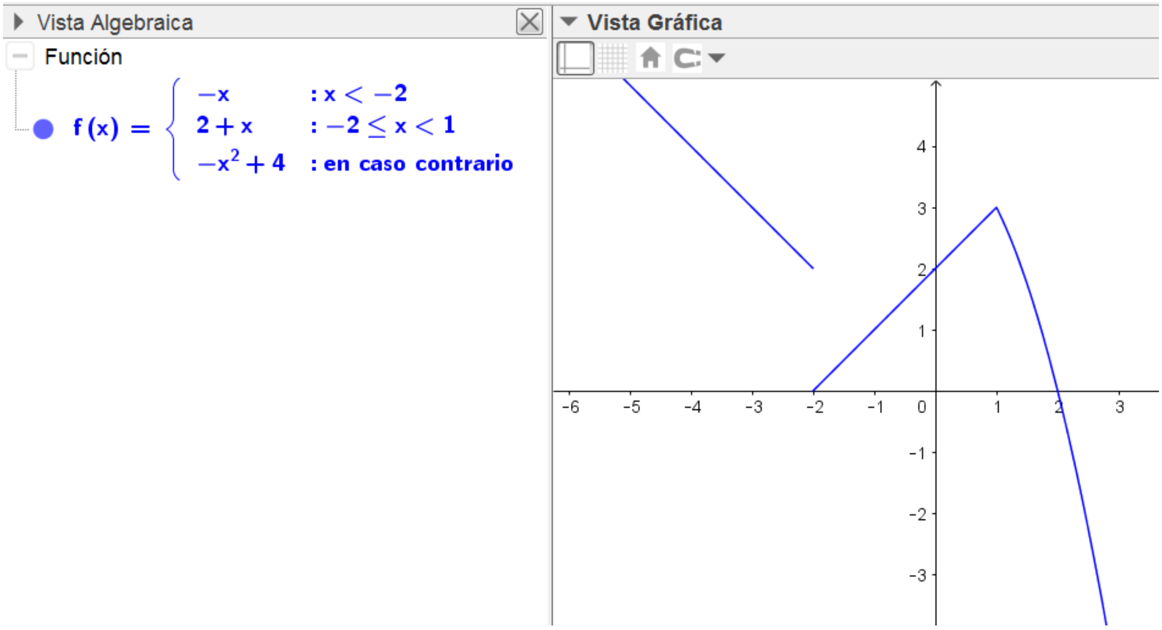
Cuando existan más de dos intervalos será necesario anidar los comandos **Si** para definir la función.

Por ejemplo, para representar la función $g(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<-2 \\ 2+x & si \quad -2\le x<1 \\ -x^2+4 & si \quad 1\le x \end{cases}$

escribiremos:

Si(x<-2,-x,Si(x<1,2+x,-x²+4))

Obteniendo la representación que aparece en la imagen siguiente:




Como alternativa se podrá introducir la expresión siguiente:

Si(x<-2,-x,x<1,2+x,-x²+4)

## Representación de otros tipos de funciones

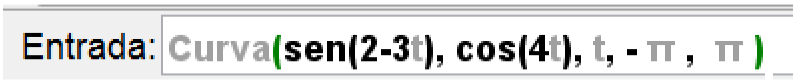
Además, GeoGebra permite representar otro tipo de funciones que describimos a continuación.

Para representar una función expresada en forma paramétrica será necesario utilizar el comando **Curva**, cuya sintaxis es:

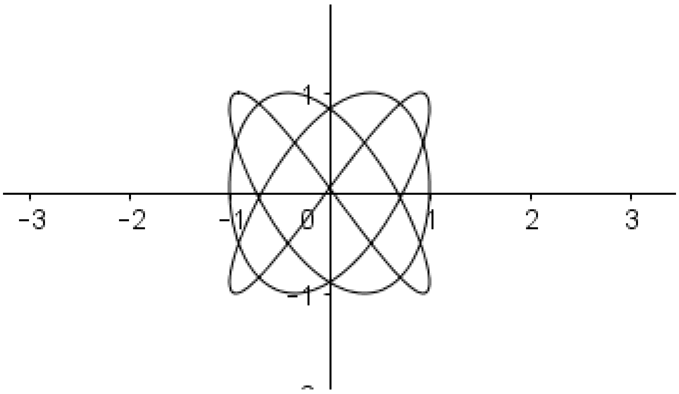
**Curva(x(t), y(t), t, $t_1$, $t_2$)**

Cuyo resultado será la representación de la función para los valores del parámetro comprendidos en el rango de valores ($t_1$, $t_2$).

Al introducir la expresión:

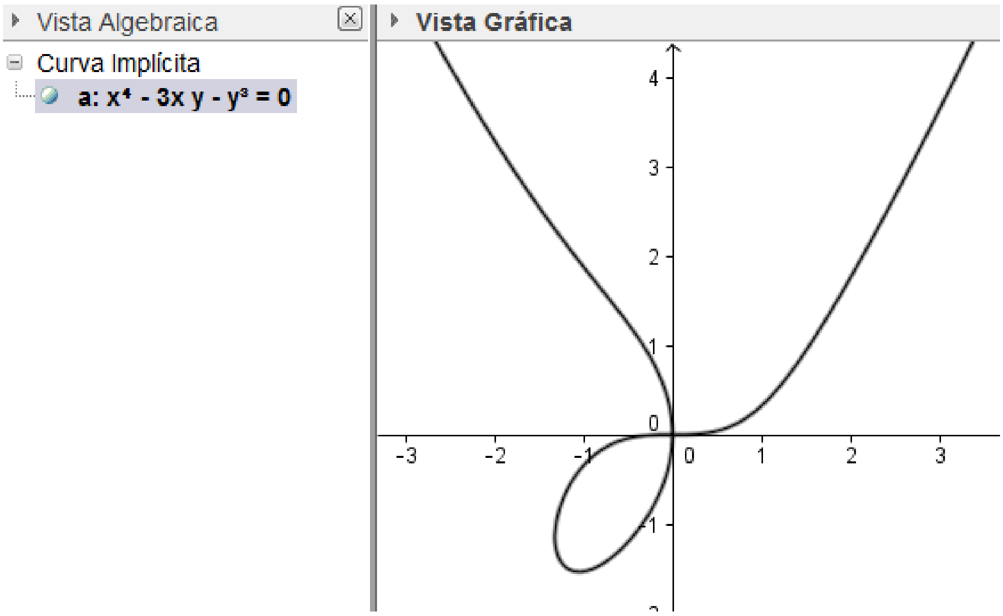



Obtendremos la gráfica siguiente:




Utilizando el comando **CurvaImplícita** podemos obtener la representación de funciones expresadas en forma explícita.

La sintaxis de este comando es **CurvaImplícita(f(x,y))** siendo f(x,y)=0 la función que se desea representar, aunque para expresiones polinómicas se podrá introducir directamente la expresión f(x,y)=g(x,y) para obtener su representación.



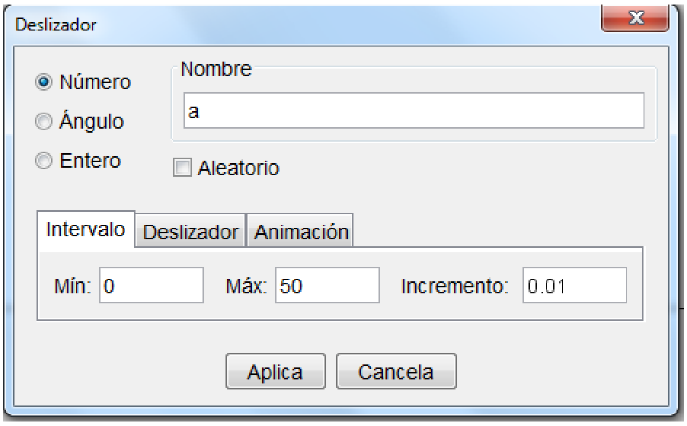

Aunque no existe un comando para representar una función expresada en forma polar, podemos obtener su representación utilizando el comando **Curva**, convirtiendo las coordenadas polares a paramétricas.

Describimos el proceso en el ejemplo siguiente.

## Ejemplo 3

*Representar las funciones* $r = \frac{a}{10}$ *y* $r = a\ \sin(2a)$.

Comenzamos definiendo un deslizador de tipo **Número** para establecer el rango de valores del parámetro que utilizaremos en el comando **Curva**.




A continuación introducimos la expresión correspondiente a la función que deseamos representar, suponiendo que está expresada en forma explícita.

Para la primera función, escribiremos r(x)=x/10.

Ocultamos la función para que no aparezca su representación.

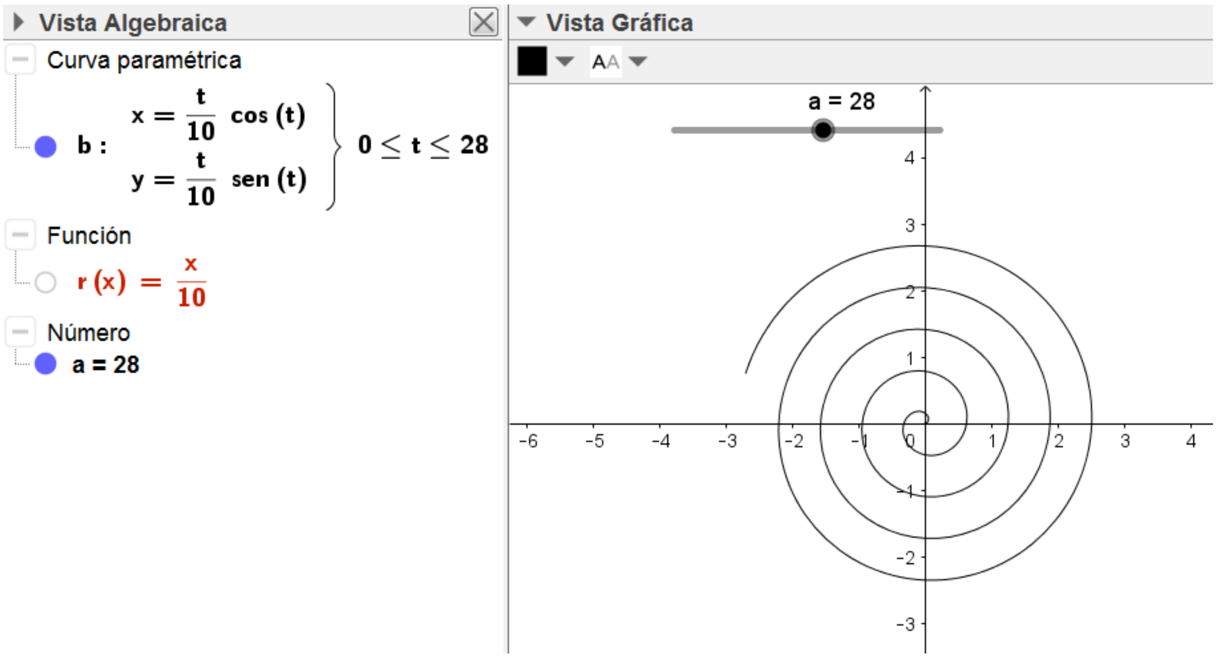
A continuación, transformamos las coordenadas polares a paramétricas

$$x(t) = r(t)\ \cos(t)$$
$$y(t) = r(t)\ \sin(t)$$

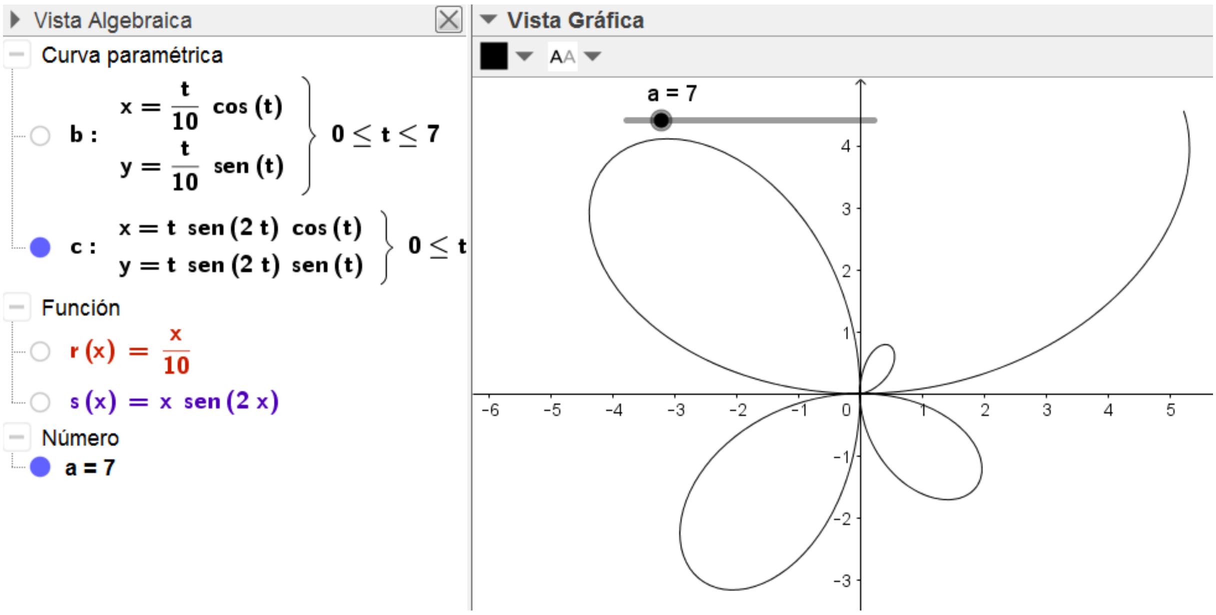
Que representaremos utilizando el comando **Curva**.

Curva(r(t)*cos(t),r(t)*sin(t),t,0,a)

Ya solo queda arrastrar el deslizador para cambiar el rango de valores para el parámetro a.




Podemos aprovechar el mismo deslizador para representar la segunda función; para la que previamente definimos una nueva función s(x)=x sen(2x), utilizando a continuación el comando **Curva** de manera análoga para convertir coordenadas.




A continuación expondremos algunas acciones que se pueden realizar sobre las funciones representadas así como los elementos que se podrán obtener a partir de los comandos disponibles en GeoGebra.

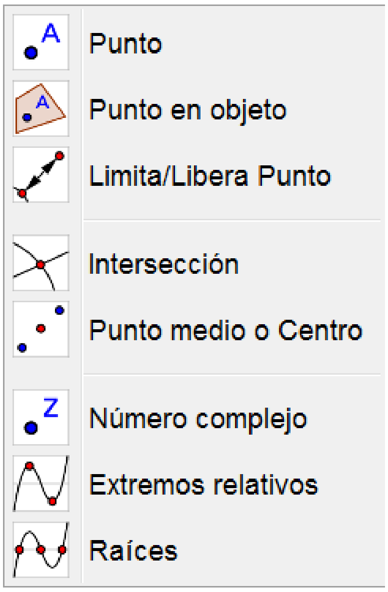
## Estudio de una función

Para determinar los puntos característicos de una función también disponemos de algunos comandos, que se podrán utilizar de manera directa sobre funciones polinómicas o estableciendo un intervalo de búsqueda para otras funciones.

### *Raíces de una función*

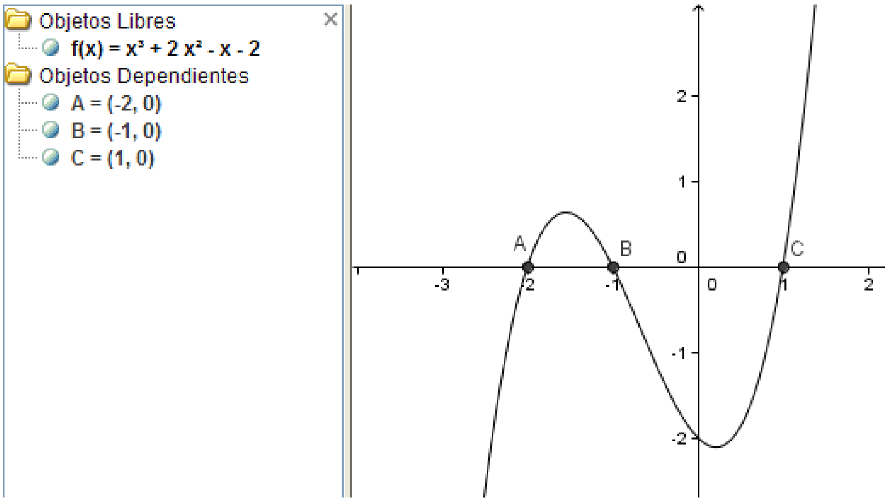
El comando función **Raíz** devuelve y representa los puntos correspondientes a las raíces de una función.

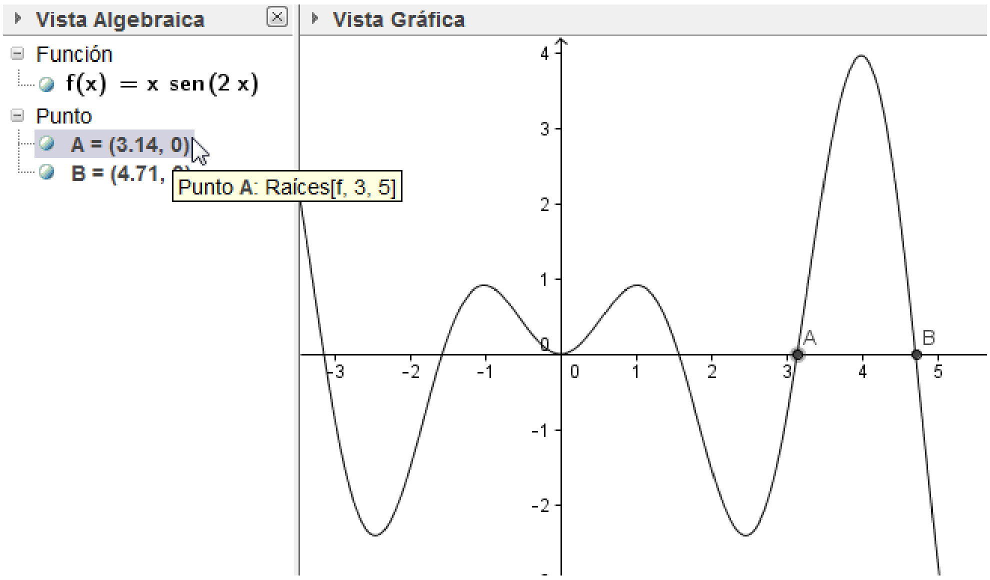
Además, disponemos de una herramienta para obtener las raíces que se encuentra en el bloque de **Puntos**.




Este comando admite distintos argumentos que relacionamos a continuación:

- **Raíz(p(x))**: devuelve las raíces de una función polinómica.
- **Raíz(f(x), $x_0$)**: obtiene una raíz de la función f(x) aplicando el método de Newton tomando como valor inicial $x_0$.
- **Raíz(f(x), $x_1$, $x_2$)**: obtiene una raíz de la función f(x) en el intervalo ($x_1$, $x_2$) aplicando el método de regula falsi.

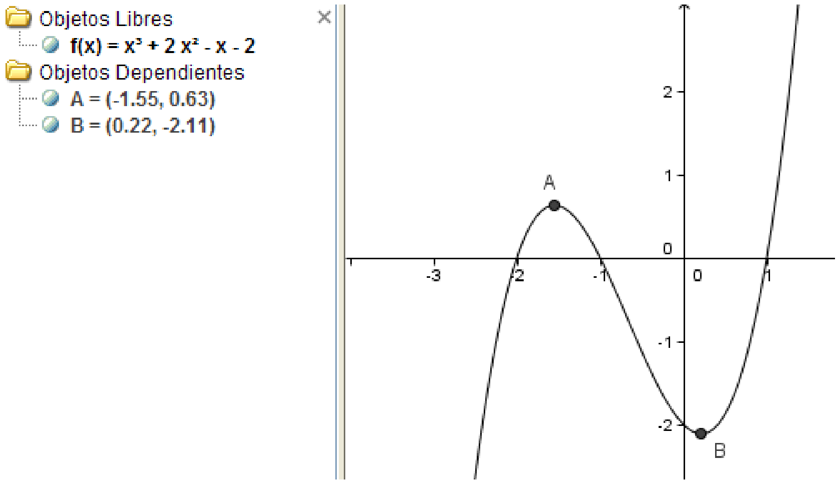



Observamos que el comando **Raíz** devuelve todas las raíces del polinomio, mientras que la segunda función solo devolverá las raíces encontradas en el intervalo indicado.

### ***Extremos de una función***

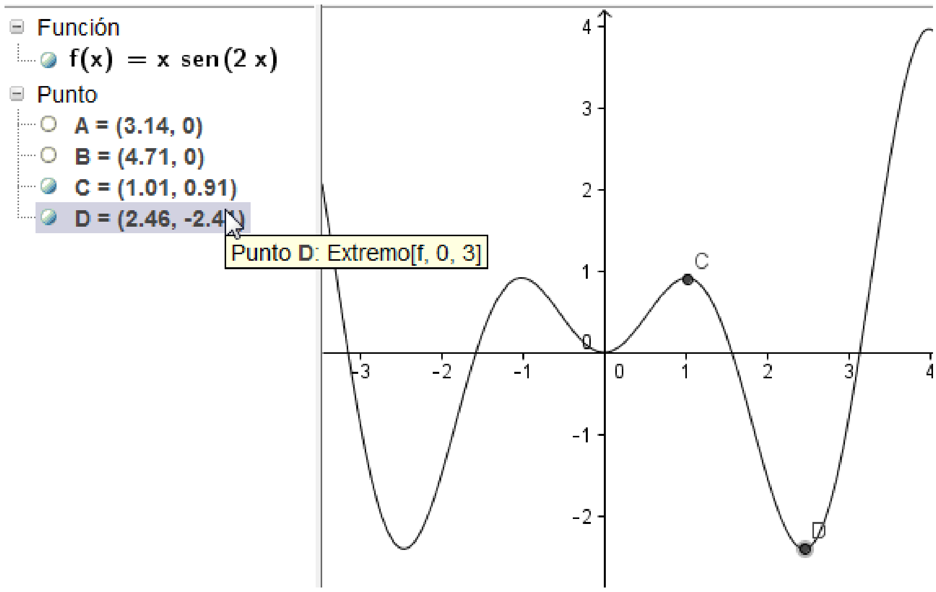
Utilizando **Extremo** se obtendrán y se representarán los puntos correspondientes a los extremos relativos de una función polinómica.




Para obtener los extremos también existe una herramienta disponible en el bloque **Puntos**.

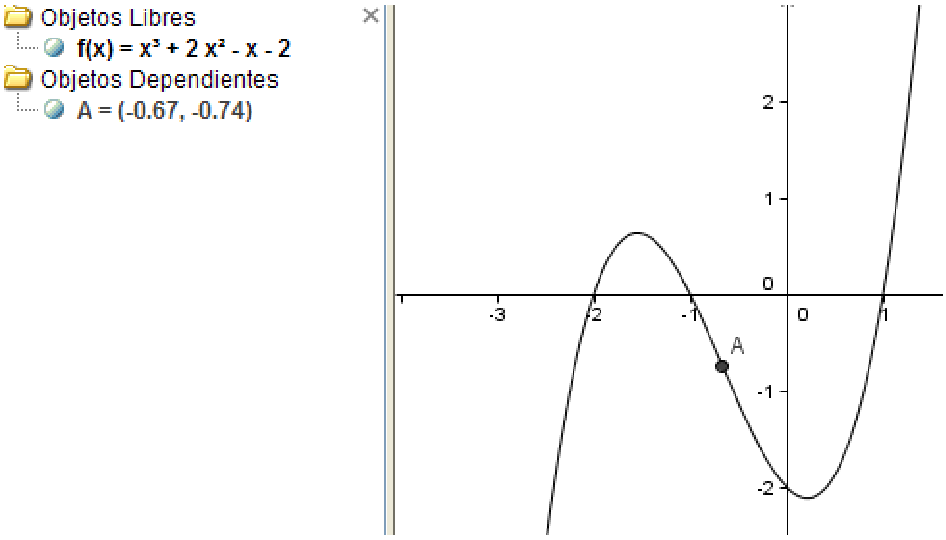
De manara análoga, con **Extremo** se obtendrán los máximos y mínimos de una función no polinómica en el intervalo indicado. En este caso, la sintaxis será:

**Extremo(f(x), $x_1$, $x_2$)**



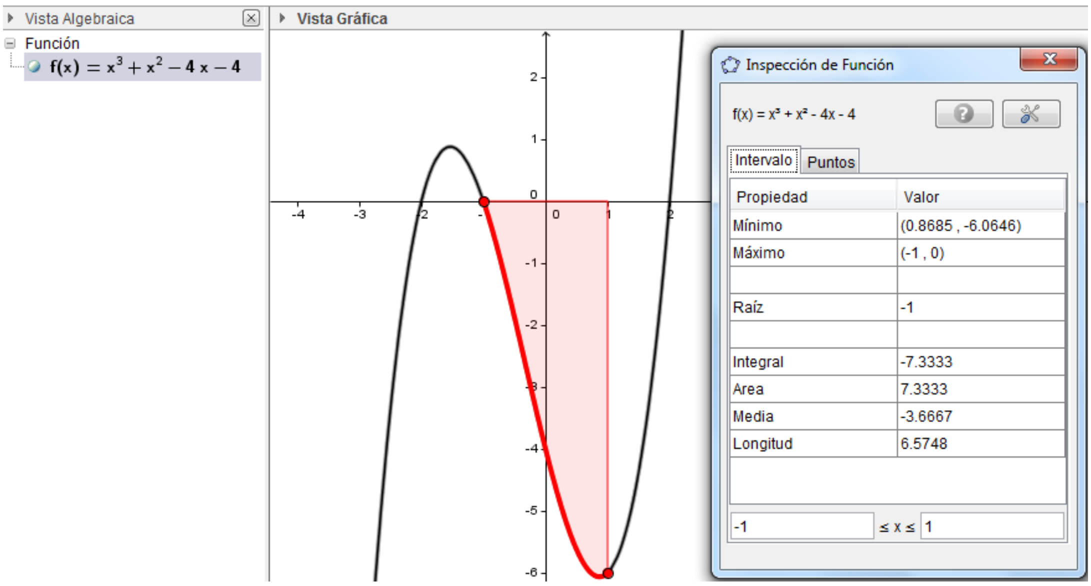

***Punto de inflexión de una función***

A través del comando **PuntoInflexión(p(x))** obtendremos las coordenadas de los puntos de inflexión de la función polinómica p(x), que además aparecerán representados en la ventana gráfica.



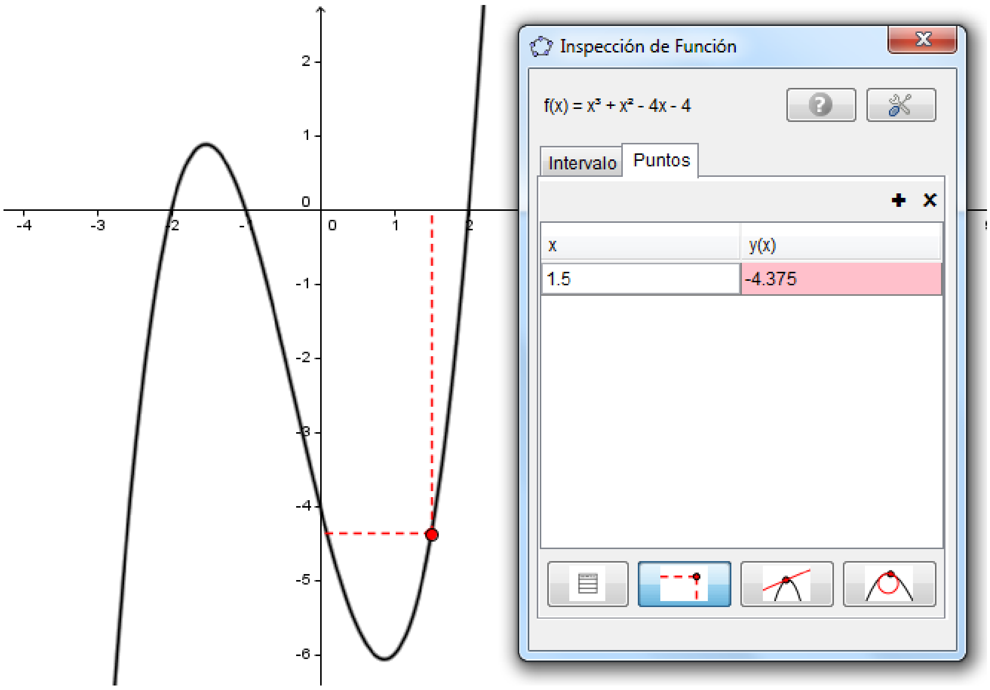

Este comando aún no está disponible para funciones no polinómicas, aunque podemos obtener su valor ya que los puntos de inflexión de una función serán los extremos de su derivada, por lo que bastará con obtener la primera derivada como exponemos en el apartado siguiente.

Para el estudio de una función disponemos de la herramienta **Analizador de funciones**  que al pulsar sobre una función previamente definida mostrará una tabla con los valores característicos.



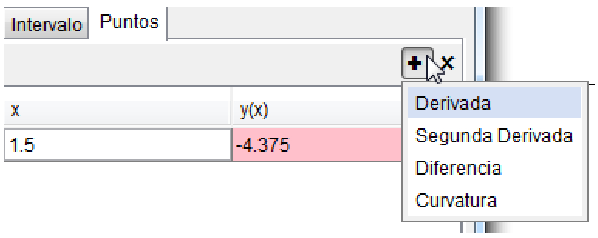

En la parte inferior del nuevo cuadro de diálogo aparecen los extremos del intervalo que ha considerado para analizar la función; por lo que bastará con modificarlos para obtener los puntos característicos en el intervalo deseado.

Al pulsar sobre la pestaña **Puntos** aparecerán nuevas opciones que permitirán introducir cualquier valor de la abscisa para obtener el correspondiente valor de la ordenada.

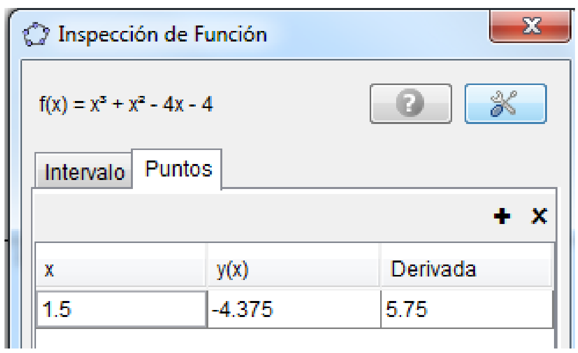



El punto que aparece se puede desplazar para recorrer la función.

Al pulsar el signo **+** situado por encima de la columna de las ordenadas aparece un nuevo menú

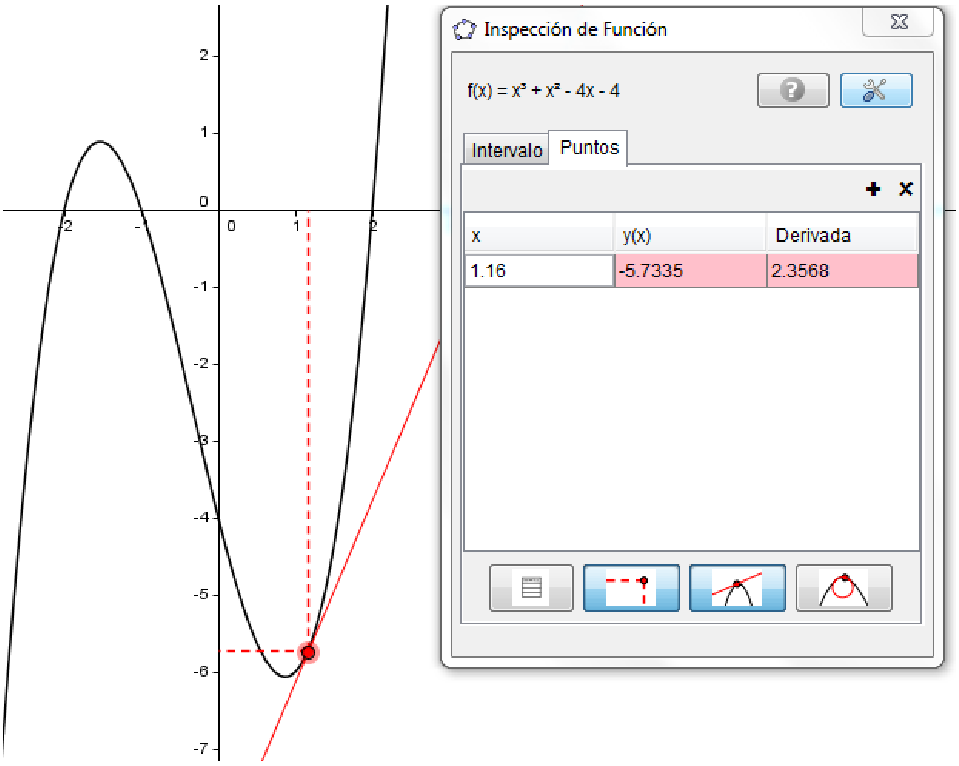


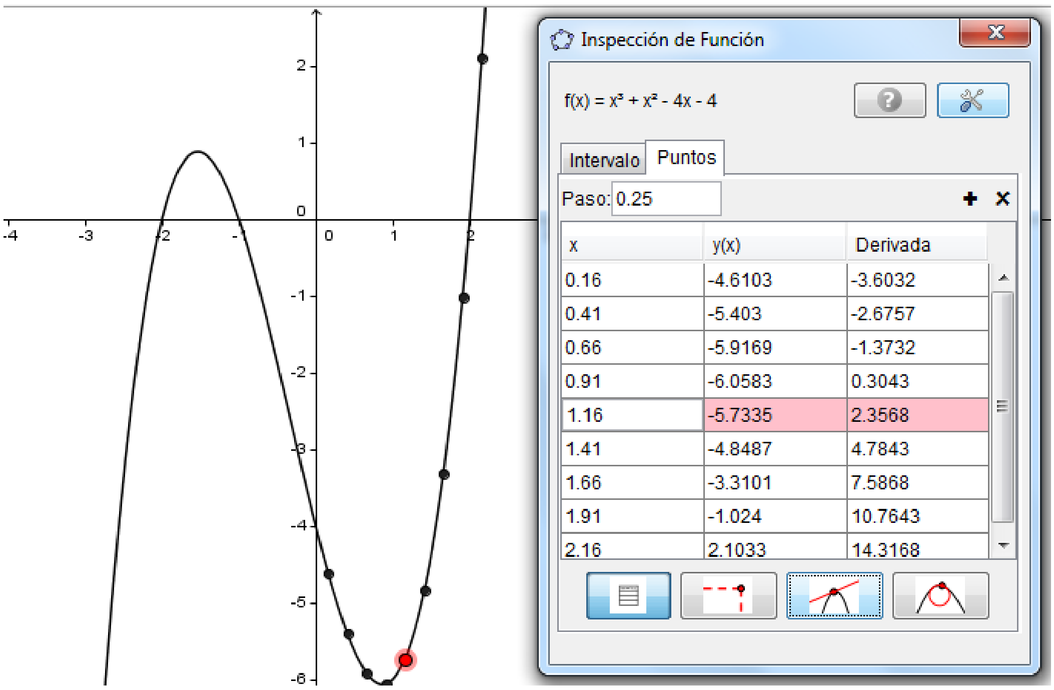

Que permite ampliar nuevas columnas con otros valores, como podemos observar en esta imagen.



El signo **x** que aparece junto al signo **+** hará que desaparezca la última columna de la tabla anterior.

También en la parte inferior de este cuadro de diálogo encontramos cuatro botones que mostrarán una tabla de valores, las coordenadas del punto (que hemos utilizado anteriormente), la recta tangente y el círculo osculador.



**Ejemplo 4**

*La altura de un proyectil en función del tiempo está representada por la función* $h(t) = -t^2 + 20t + 300$ *(altura en metros, t en segundos).*

*Determina:*

*La altura desde la que se ha lanzado el proyectil.*

*La altura máxima que alcanza.*

*El tiempo que el proyectil está por encima de 175 m.*

*El tiempo que tarda el proyectil en impactar con el suelo.*

Comenzamos definiendo la función $h(x) = -x^2 + 20x + 300$.

Observaremos que al pulsar la tecla **Enter** no aparece nada en la vista gráfica, en contra de lo que se ha indicado con anterioridad. Esto se debe a que la función está fuera del rango actual de la vista gráfica, por lo que hay que utilizar las opciones de zoom o ajustar la escala.

Antes de utilizar las distintas opciones para ajustar la vista gráfica para visualizar la función es necesario que se analice con el alumnado las características de la función para determinar los valores por los que se mueve.

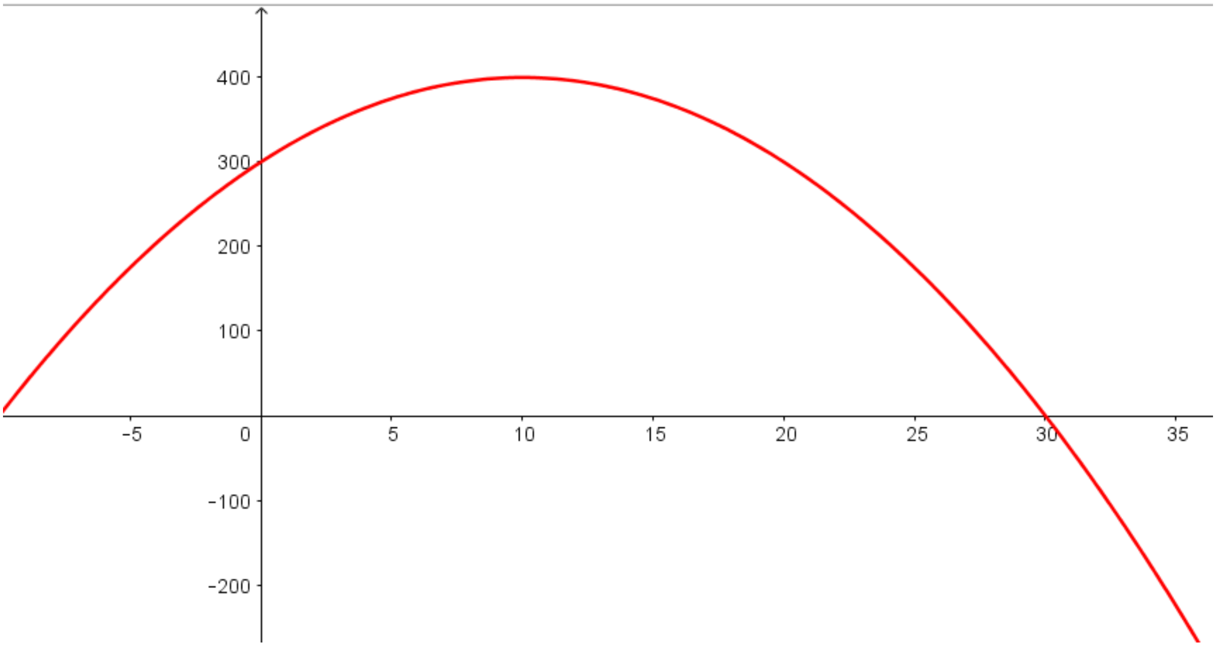
Para cambiar la escala basta pulsar el botón derecho del ratón sobre una zona libre de la vista gráfica.

Aparecerá:


Podemos elegir pulsar la opción **Zoom** o la que permite ajustar la escala **EjeX:EjeY**.

Podemos combinar las dos opciones anteriores, haciendo zoom hasta visualizar la función utilizando para ello la rueda del ratón o las opciones que aparecen en los bloque de herramientas, ajustando posteriormente la escala entre los ejes.

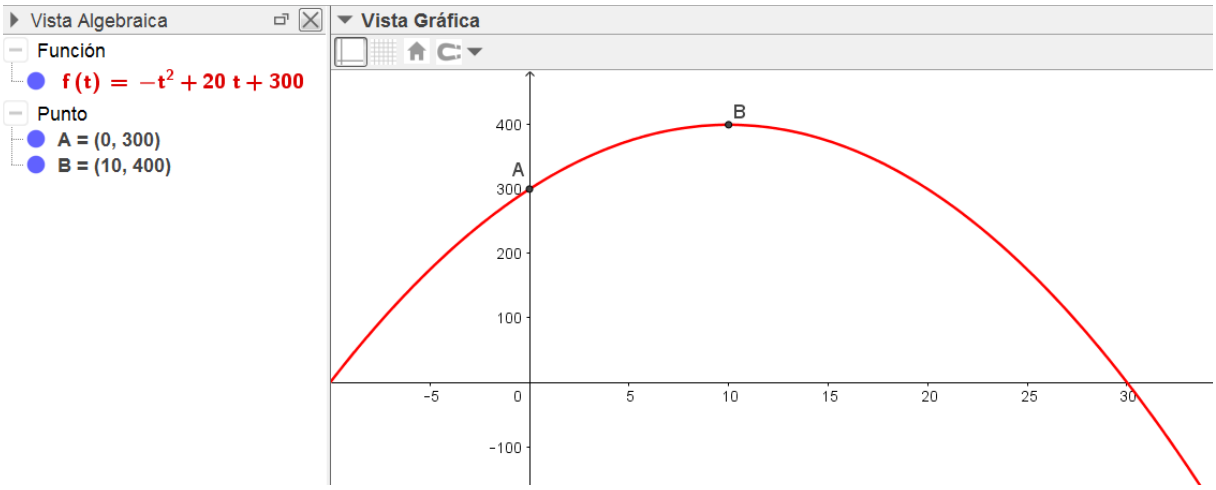
Una vez visualizada la función aparecerá una parábola similar a la que mostramos en la imagen siguiente:



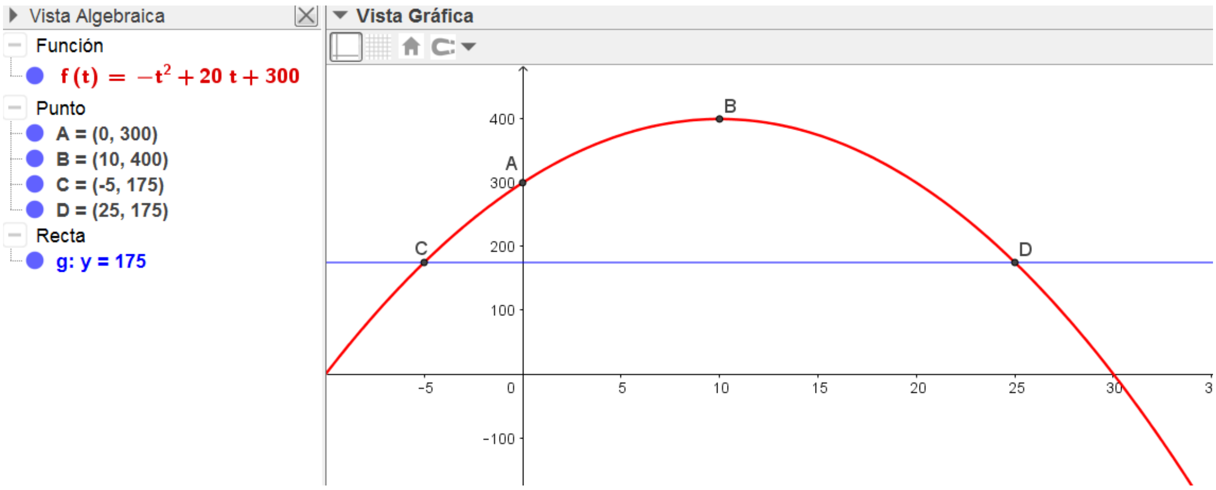

Aprovechando las opciones gráficas es conveniente analizar la trayectoria del proyectil, interpretando el significado de algunos puntos como pueden ser los cortes con los ejes o el extremo de la función, antes de dar respuesta a las cuestiones planteadas en esta actividad.

Para obtener la altura desde la que se ha lanzado el proyectil basta con obtener el punto de intersección de la función con el eje Y. Obtendremos el punto A(0,300), lo que significa que se ha lanzado desde una altura de 300 metros.

La siguiente cuestión es determinar la altura máxima que alcanza, que se podrá obtener utilizando el comando **Extremo**. El resultado obtenido es el punto B cuyas coordenadas son (10,400), lo que significa que alcanza una altura máxima de 400 metros a los 10 segundos de su lanzamiento.

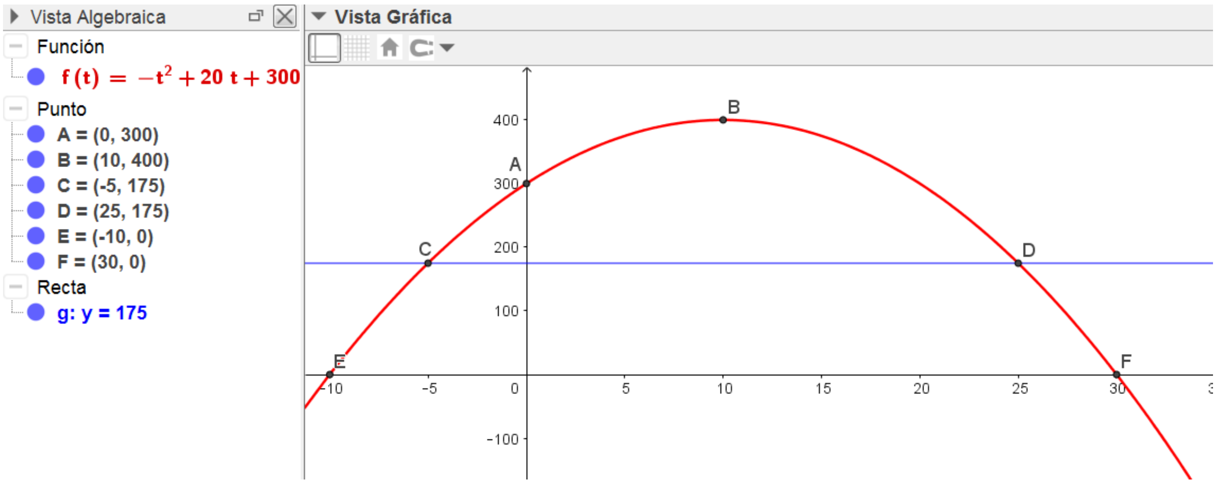



Para determinar cuánto tiempo está el proyectil por encima de 175 metros, podemos dibujar la recta que corresponde a esa altura, determinando a continuación los puntos de corte de la función con la recta anterior.




C y D son los puntos de intersección de los que solo debemos considerar el segundo punto. Dado que D tiene de coordenadas (25,175) podemos responder que el proyectil está durante 25 segundos por encima de 175 metros.

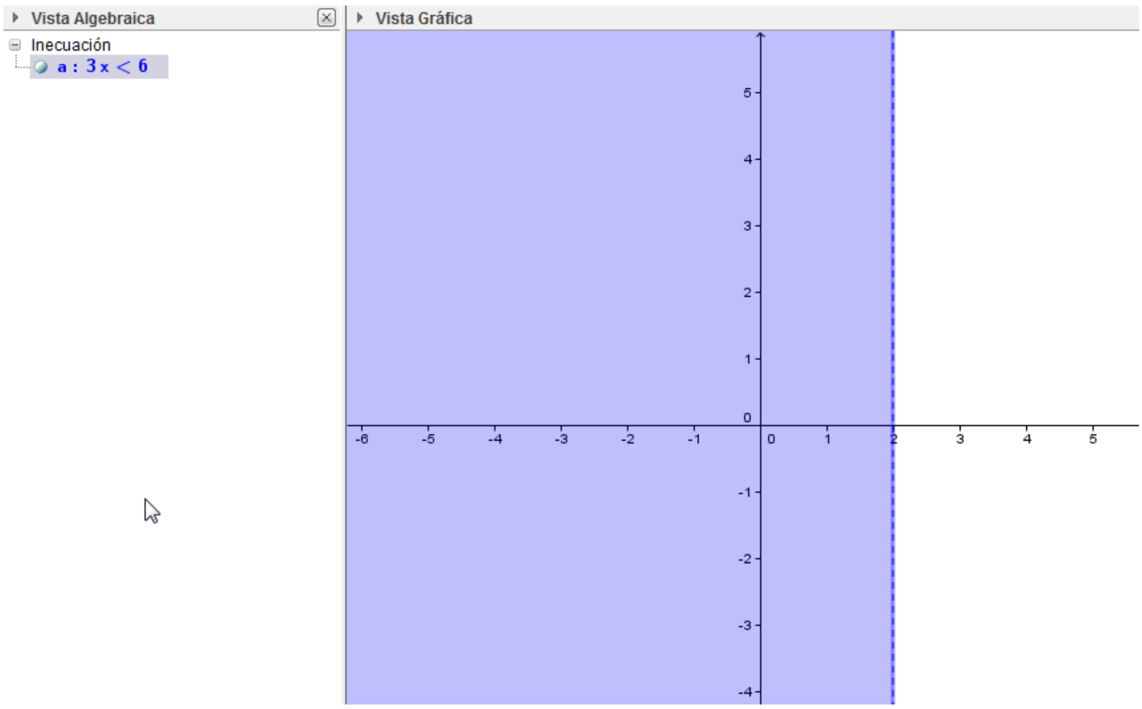
Y por último, para determinar el momento en que el proyectil alcanza el suelo basta obtener los puntos de intersección del eje X con la función. El resultado será el que corresponde al punto F cuyas coordenadas son (30, 0), lo que significa que tarda 30 segundos en alcanzar el suelo.




## Inecuaciones

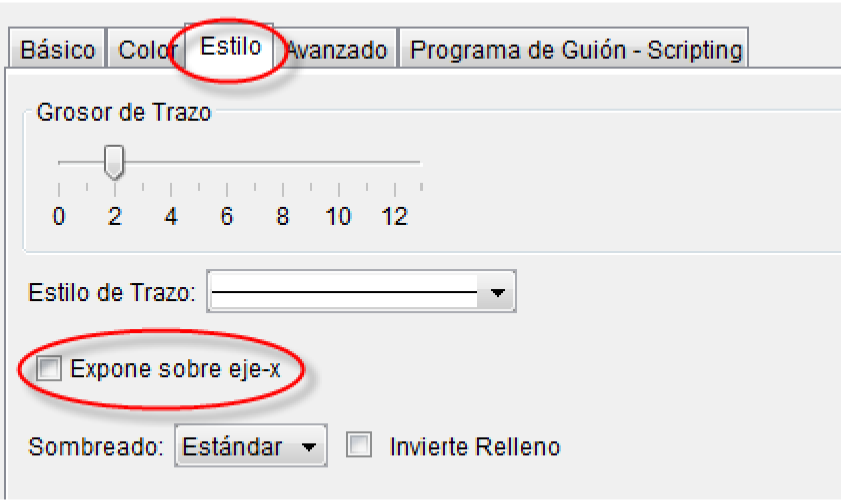
Para representar el conjunto solución de una inecuación, bastará con introducirla a través de la línea de entrada.


Al pulsar **Enter**, el conjunto solución aparecerá representado en la Vista gráfica, tal y como mostramos en la imagen siguiente:

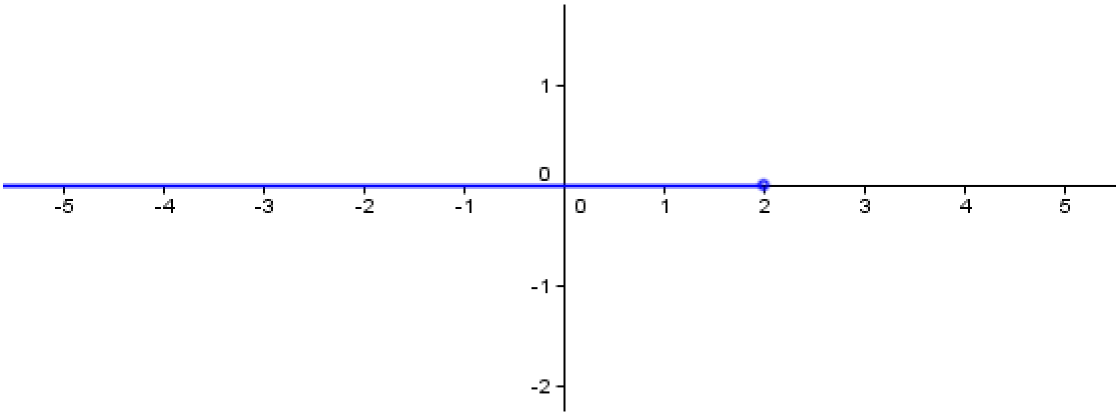



En la imagen observamos el conjunto de puntos del plano que corresponden al conjunto solución de la inecuación. Si deseamos que aparezca como conjunto solución el intervalo de valores de x, solo hay que pulsar el botón derecho sobre la vista gráfica o sobre el conjunto solución representado para seleccionar **Propiedades de Objeto**.

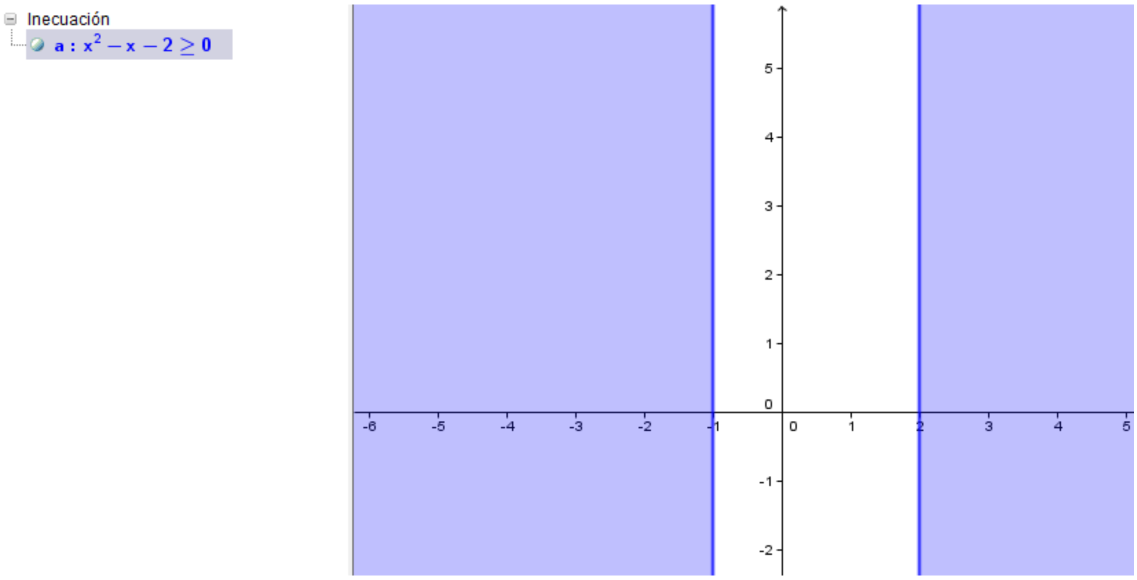
En la pestaña **Estilo**, solo hay que marcar la opción **Expone sobre eje-x** para que el conjunto solución aparezca representado en el eje de abscisas.

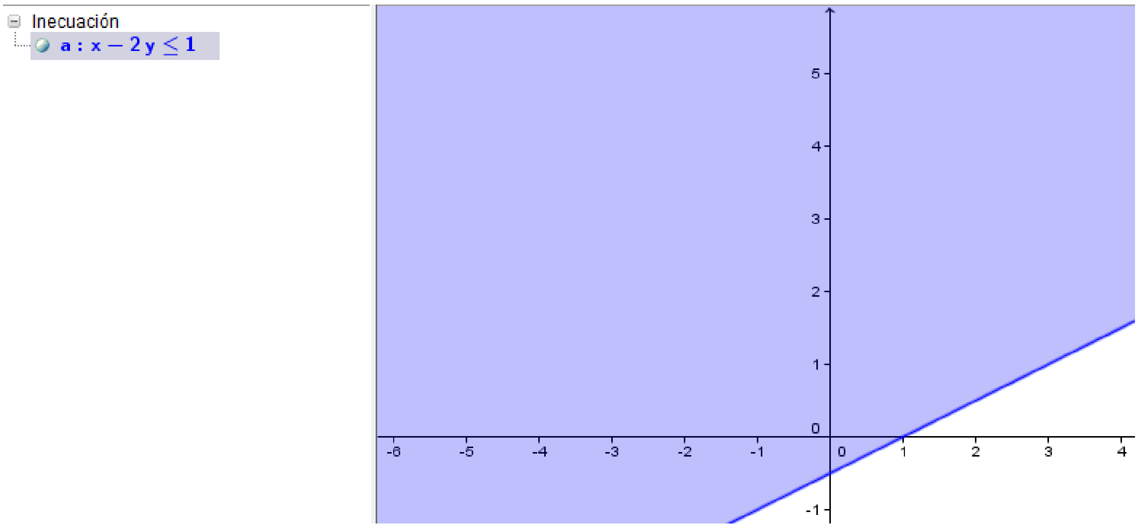



Una vez marcada la opción anterior, el resultado será el que aparece en la imagen siguiente:



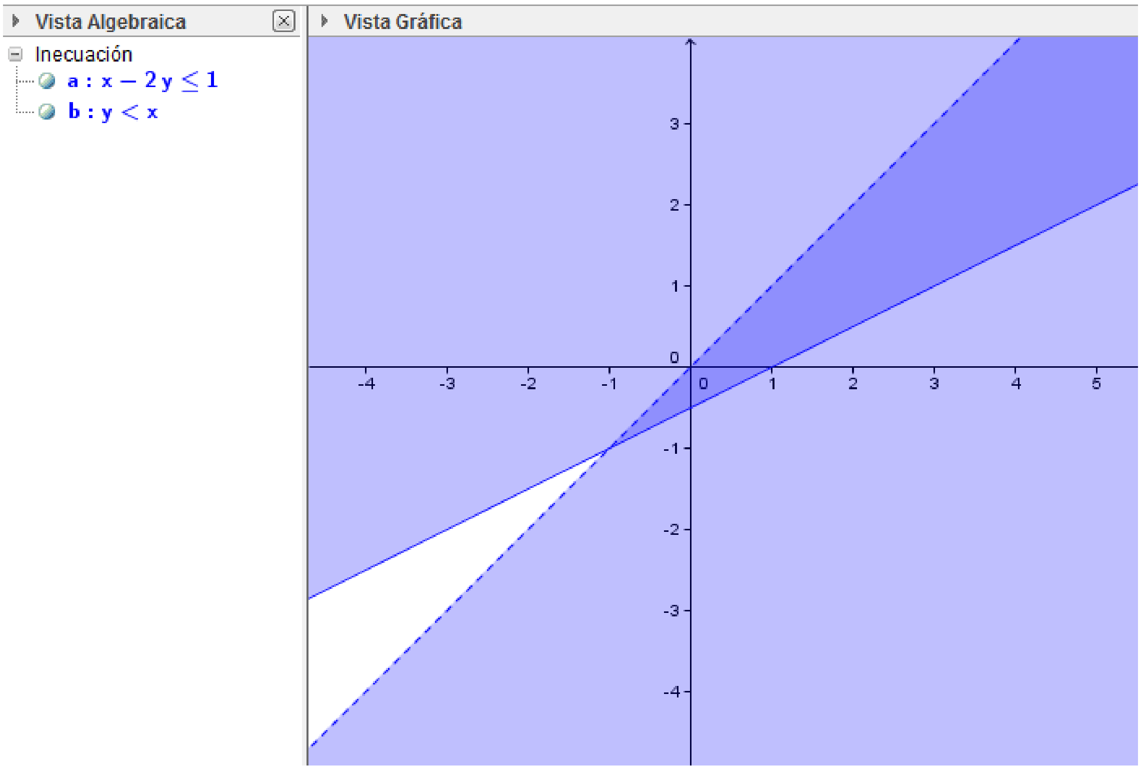

De manera análoga se podrá representar, y por tanto, resolver, cualquier inecuación de grado superior o de más de una incógnita.

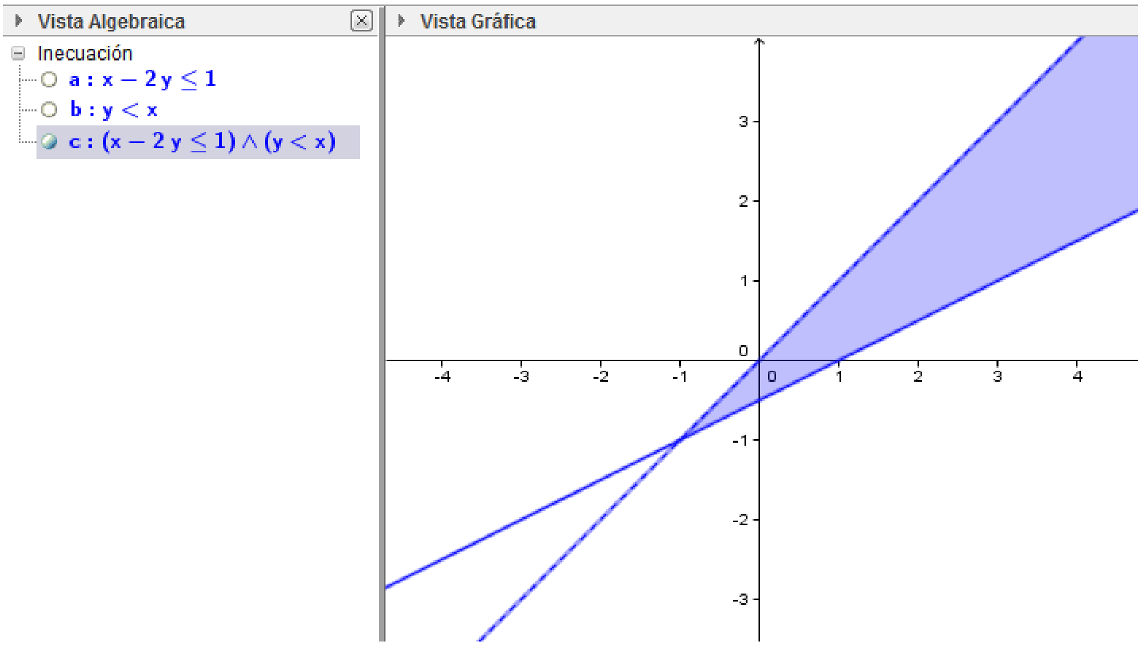



Utilizando el operador lógico **Y** (**∧**) se podrá obtener el conjunto solución correspondiente a un sistema de inecuaciones.

Para ello, bastará con representar con escribir **a ∧ b**, siendo *a* y *b* las inecuaciones.

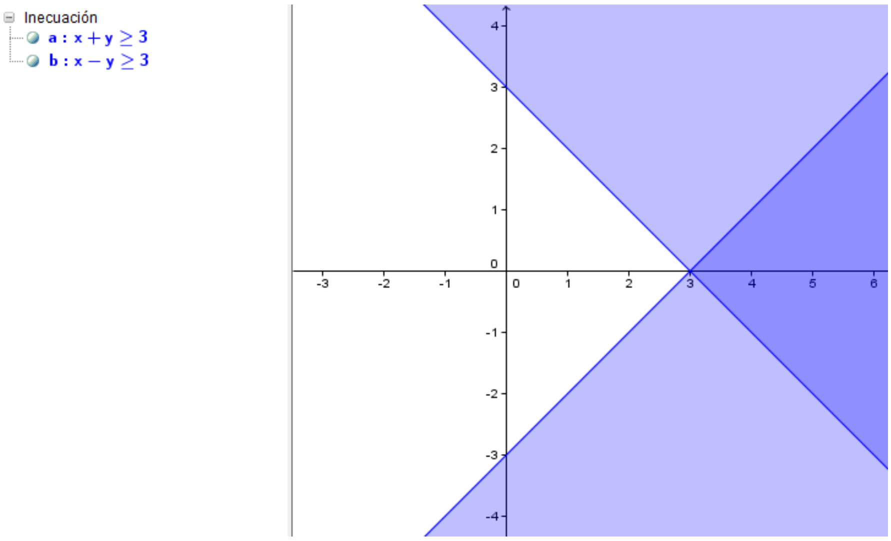


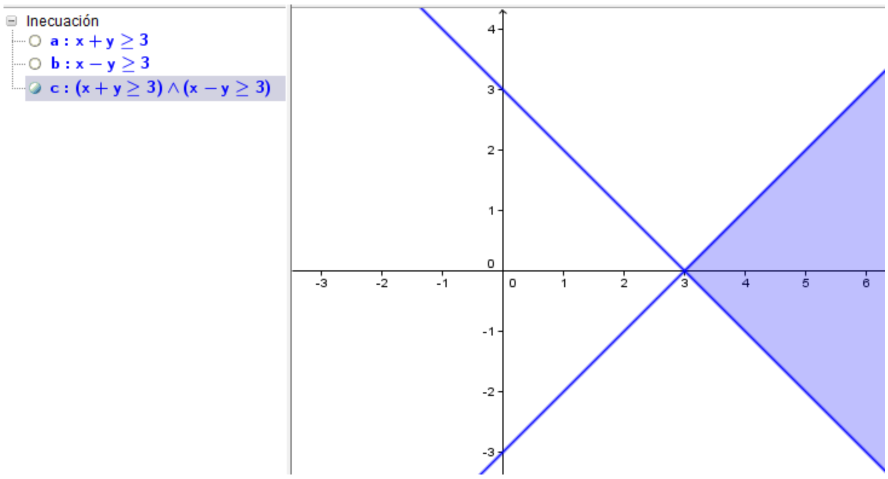

## Ejemplo 5

*Obtener el conjunto solución del sistema de inecuaciones* $\left.\begin{array}{l} x+y \geq 3 \\ x-y \geq 3 \end{array}\right\}$.

Comenzamos introduciendo cada una de las ecuaciones a través de la línea de entrada, para obtener la representación que aparece en la imagen siguiente:




Para obtener el conjunto solución del sistema de inecuaciones, bastará con introducir la expresión a ^ b.




Las posibilidades que ofrece la representación de inecuaciones nos permite resolver problemas de programación lineal.

**Ejemplo 6**

*Una empresa elabora dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de B necesita 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina. Semanalmente se dispone de 100 horas en la primera máquina y de 110 horas en la segunda.*

*Si la empresa obtiene un beneficio de 70 euros por cada unidad de A, y de 50 euros por cada unidad de B, ¿qué cantidad semanal de cada* *producto debe producir con objeto de maximizar el beneficio total? ¿Cuál es ese beneficio?*

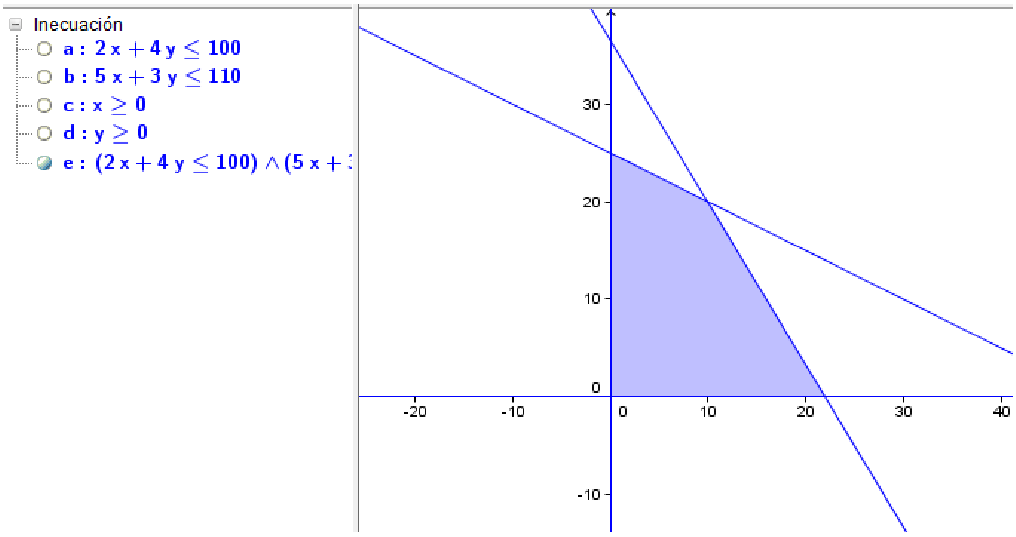
A partir de los datos construimos la tabla siguiente:

| Productos | Máquina 1 | Máquina 2 |
|---|---|---|
| A | **2 horas** | **5 horas** |
| B | **4 horas** | **3 horas** |
| | 100 horas | 110 horas |

Si llamamos x al número de unidades del producto A, e y al número de unidades del producto B, las relaciones entre estas variables, de acuerdo con las limitaciones de horas de cada máquina son las siguientes:

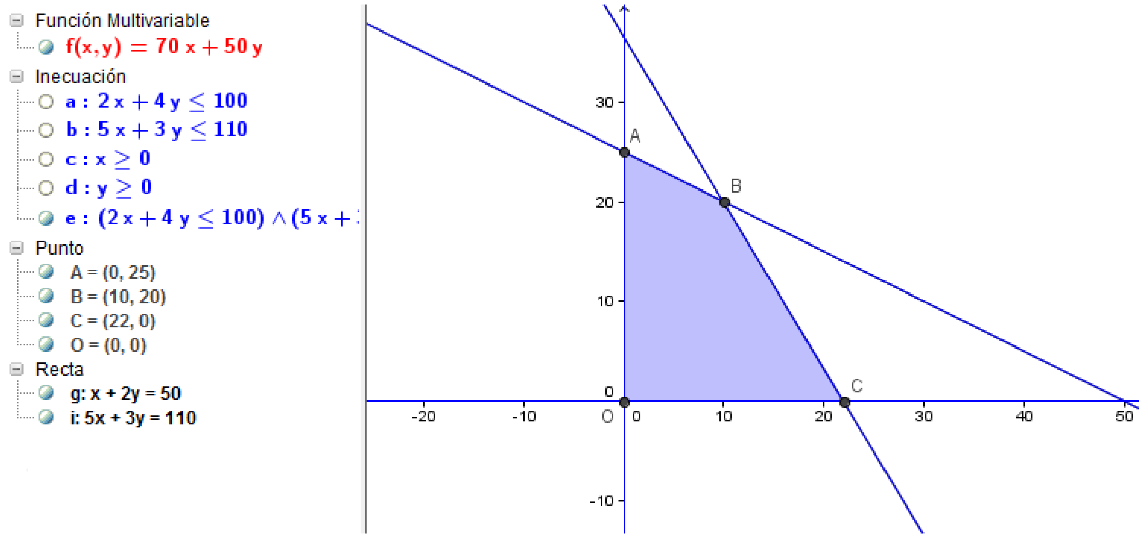
$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y\leq 100 \\ 5x+3y\leq 110 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las desigualdades anteriores y obtenemos el recinto común.




La función que hay que maximizar es *70x+50y* que definimos introduciendo la expresión a través de la línea de entrada.

A continuación, para obtener los vértices del recinto, es necesario dibujar las rectas correspondientes a las dos primeras desigualdades.



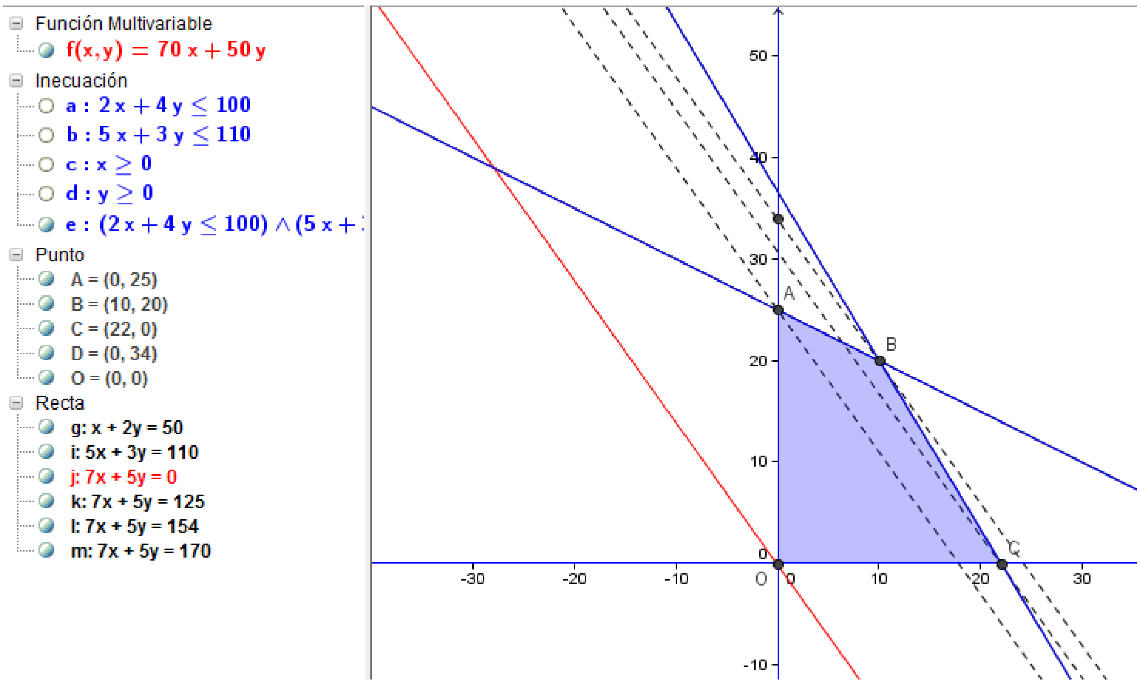

Ya solo queda comprobar en qué vértice se obtiene el máximo de la función.

Para ello, podemos obtener el valor de la función para cada uno de los vértices del conjunto solución, escribiendo f(A), f(B), ...

Como alternativa se podrá obtener el comando Vértices para obtener las soluciones de un sistema de inecuaciones.

**Vértices(sistema de inecuaciones)**

También, se podrá representar la recta 70x+50y=0, dibujando a continuación las rectas paralelas por cada uno de los vértices del recinto para observar cuál tiene mayor ordenada en el origen.



Por tanto, el máximo de la función se alcanza en el vértice B cuyas coordenadas son (10,20), lo que significa que se harán 10 unidades del producto A y 20 del producto B.

El máximo de la función será 70.10+50.20=1.700 €.

**Actividades propuestas I**

1. Representar las funciones siguientes:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2} \qquad g(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad h(x) = x\, sen(x)\,.$$

2. Representa las siguientes funciones:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + sen(t) \\ y(t) = t\ \cos(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 2\, sen(t) \\ y(t) = 3\cos(t) \end{cases}$$

3. Representa la función siguiente definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < -1 \\ x^2 - 2 & si \quad -1 \le x < 1 \\ 2 - x & si \quad 1 \le x \end{cases}$$

4. Estudiar la función: $y = x^5 - 4x^3 + 2x$
5. En el contrato de trabajo a un vendedor de libros le ofrecen dos alternativas:

   A. Sueldo fijo al mes de 1.000 €.

   B. Sueldo fijo al mes de 650 € más el 20% de las ventas que realice.

   Realiza una gráfica para representar lo que ganaría en un mes con cada una de las modalidades de trabajo. ¿A cuánto tiene que ascender las ventas de un mes para ganar más con la segunda modalidad de trabajo?
6. Ana tiene 6 años y su madre 35 años. ¿Durante cuántos años la edad de la madre será mayor que el doble de la edad de Ana?
7. Lanzamos una bola desde un punto situado a 1,5 metros del suelo. Después de t segundos, la distancia de la bola al suelo en metros viene

dada por la expresión siguiente: $h = -2t^2 + 6t + 1.5$. Resolver las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

b. Determinar, con una aproximación de una décima, el instante en el que la bola llega al suelo.

c. Determinar, con la misma precisión, cuánto tiempo está la bola por encima de los 3 metros.

8. Dos partículas que se mueven sobre el eje de abscisas, se encuentran en la posición que determinan en cada instante t en segundos, las funciones siguientes:

$$p_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + 10 \qquad p_2(t) = -\frac{1}{6}t^2 + t + 8$$

a. Demuestra que las dos partículas nunca se encuentran.

b. Halla la distancia mínima que existirá entre las dos partículas

c. Para $0 \le t \le 10$, calcula la velocidad máxima de cada una de las partículas.

9. Una pelota se lanza hacia arriba desde un puente. La altura que alcanza expresada en metros viene dada por la función $f(t) = -5t^2 + 15t + 12$.

a. ¿A qué altura se encuentra el puente?

b. ¿Cuál es la velocidad media de la pelota durante el primer segundo? ¿Y en el segundo?

c. ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el instante t = 1? ¿Y en t = 2? Interpreta los resultados obtenidos.

d. ¿Cuál es la velocidad de la pelota en cada instante t?

e. ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?

f. ¿Qué aceleración tiene la pelota en cada instante t?

10. Resuelve las inecuaciones siguientes:

$$\frac{x-3}{2} > 5x - 7 \qquad \frac{x-y}{2} \le \frac{y-x}{3} \qquad x^2 - 7x + 12 \ge 0$$

11. Resuelve los sistemas de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+5>2x+7 \\ 2x-3>5x-8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y\leq 3 \\ 3x-2y\geq 6 \\ x+3y\geq 1 \end{array}\right\}$$

12. Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

$x+y\leq 15 \qquad x\leq 2y \qquad 0\leq y\leq 6 \qquad x\geq 0$

a. Representa gráficamente dicho recinto.

b. Calcula sus vértices.

c. Determina el máximo valor de la función F(x,y)=8x+5y en el recinto anterior y dónde se alcanza.

13. Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones, y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y 1 cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.

Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcule el número de camisas y de pantalones que debe confeccionar para obtener el máximo beneficio, y determine este beneficio máximo.

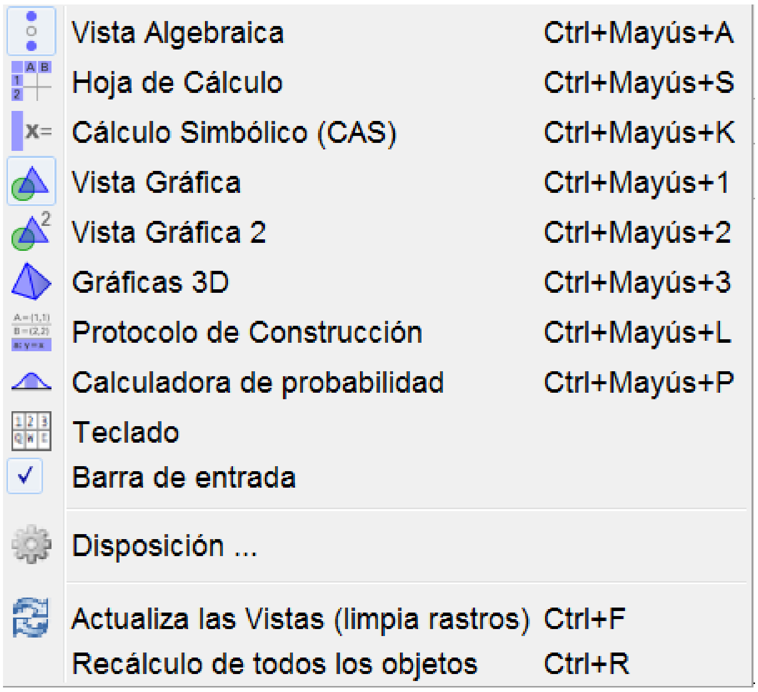
14. Un comerciante dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0.60 euros/kg y las vende a 0.90 euros/kg, mientras que las del tipo B, las compra a 1 euro/kg y las vende a 1.35 euros/kg.

Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?

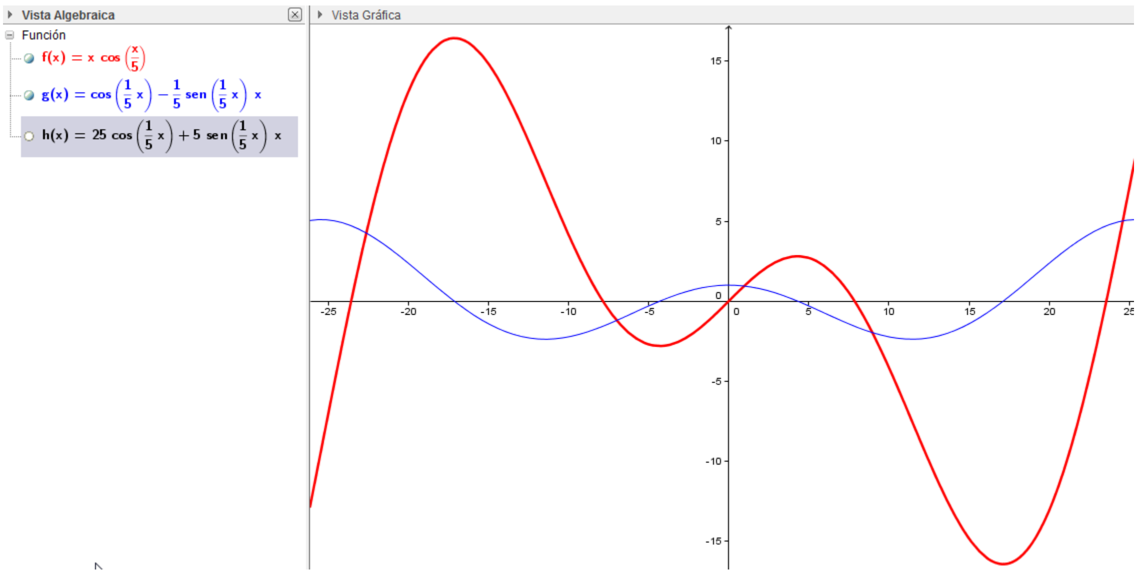
## Aplicaciones al análisis y al cálculo

A continuación, exponemos algunas aplicaciones de GeoGebra al análisis como serán el cálculo de límites, derivadas o integrales, sumas y productos.

Utilizaremos para ello las opciones de la **Vista Cálculo simbólico** (CAS) que comenzaremos activando.

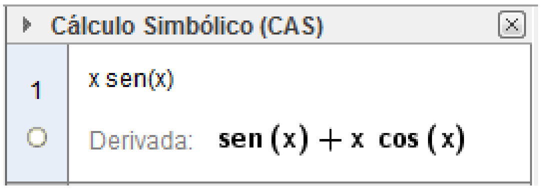



Recordemos que en versiones anteriores ya era posible obtener la función derivada o la integral de una función utilizando el comando Derivada a través de la línea de entrada, tal y como podemos observar en la imagen siguiente:

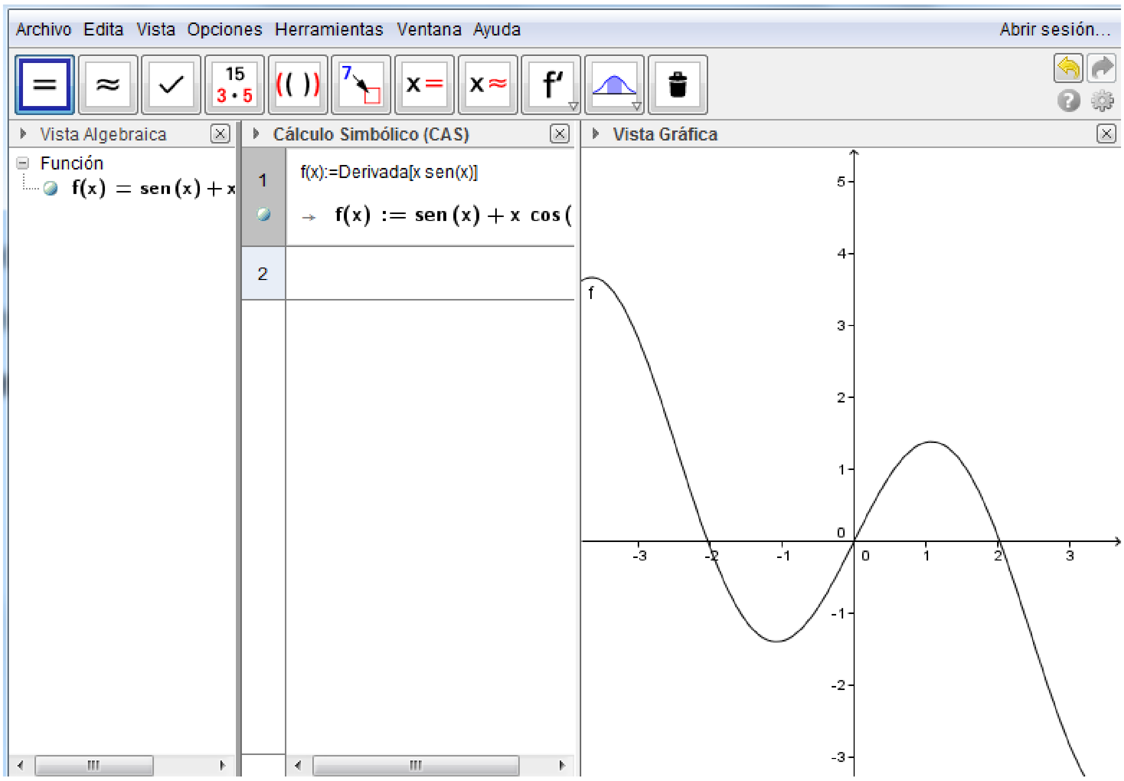


## Cálculo diferencial

Para obtener la derivada de una función disponemos del botón  que devolverá la función derivada de la expresión sobre la que se aplique.

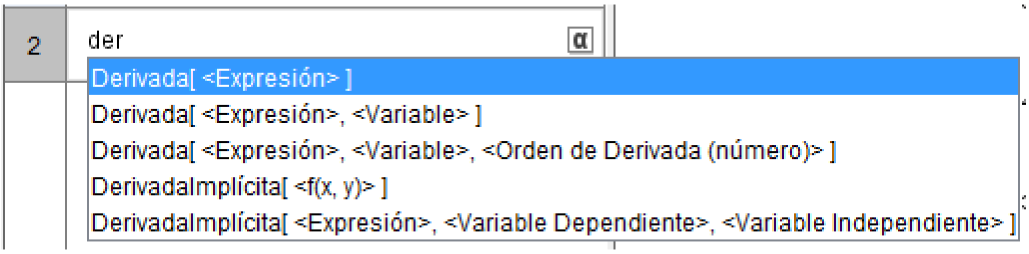


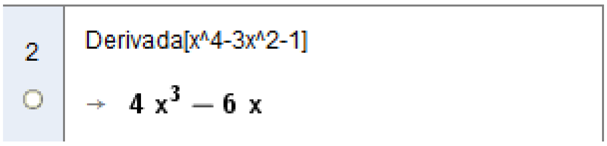

Recordemos que al marcar el círculo que aparece debajo del número de orden de la fila, obtendremos su representación en la **Vista gráfica** y la definición de la función en la **Vista algebraica**.



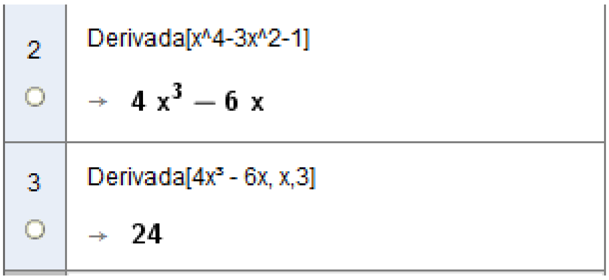

Además, como ha ocurrido con otros botones, disponemos del comando **Derivada** para el cálculo diferencial.

En la imagen siguiente, observamos que esta función permitirá obtener derivadas de una función, derivadas con respecto a una determinada variable y derivadas de orden superior, dependiendo de los argumentos que se incluyan.

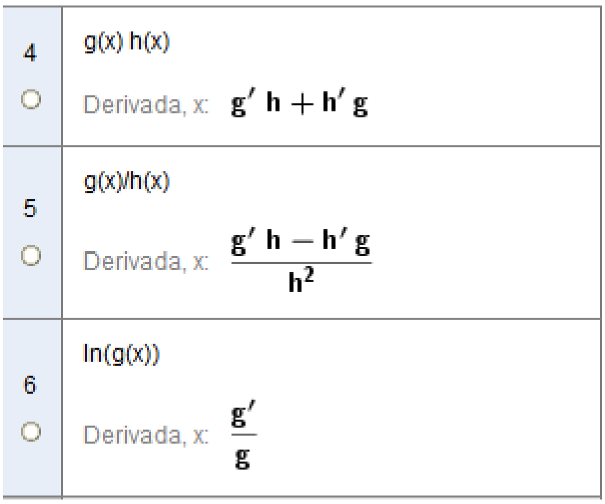



Para obtener una derivada de orden superior, bastará con incluir en el comando **Derivada** los argumentos: función, variable y orden de la derivada.




También, puede aplicarse el comando **Derivada**, o el botón correspondiente, para obtener la expresión de la derivada de funciones representadas de forma simbólica, como ocurre en los ejemplos siguientes:

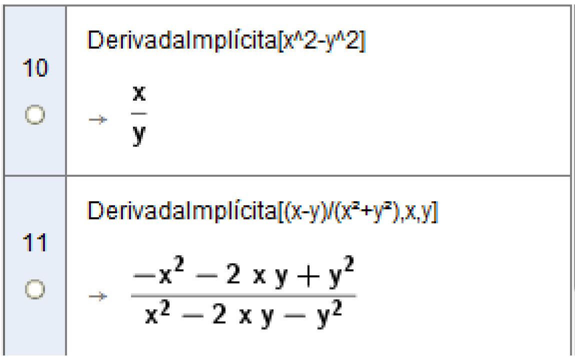



Al mostrar la sintaxis del comando Derivada hemos podido observar que también disponemos del comando **DerivadaImplícita** para calcular este tipo de derivadas.

La sintaxis que admite este comando es:

**DerivadaImplícita(f(x,y))** para obtener la derivada implícita de la función f siendo x la variable independiente e y la dependiente.

**DerivadaImplícita(f,vd,vi)** para obtener la derivada implícita de f con respecto a las variables vi (independiente) y vd (dependiente).




El comando **Derivada** cuya sintaxis ya conocemos, admite más opciones que exponemos a continuación.

Añadiendo un argumento más en la sintaxis anterior obtendremos las derivadas de orden superior.

Por tanto, para obtener la derivada de orden n de una función f(x) escribiremos:

**Derivada(f(x),n)**

Aprovechando las posibilidades que ofrecen los deslizadores, podemos incluir uno para ir variando el orden de la derivada.

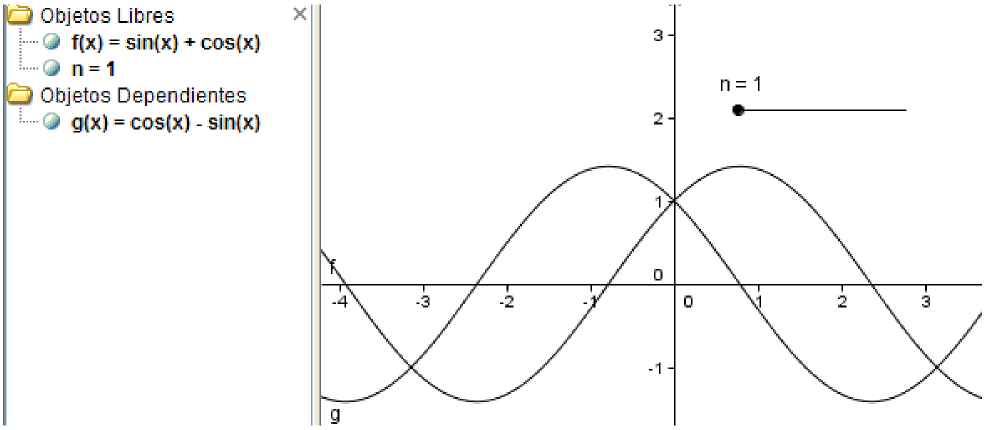
Por ejemplo, creamos un deslizador *n* que varíe entre 1 y 10, con incrementos de una unidad, y una función $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

A continuación introducimos el comando

**Derivada(f(x), n)**

Obtendremos la primera derivada de la función f(x).

Al variar el valor de *n* en el deslizador irán apareciendo las sucesivas derivadas de la función.




La incorporación de un deslizador en la expresión de una función permitirá estudiar transformaciones en las funciones.

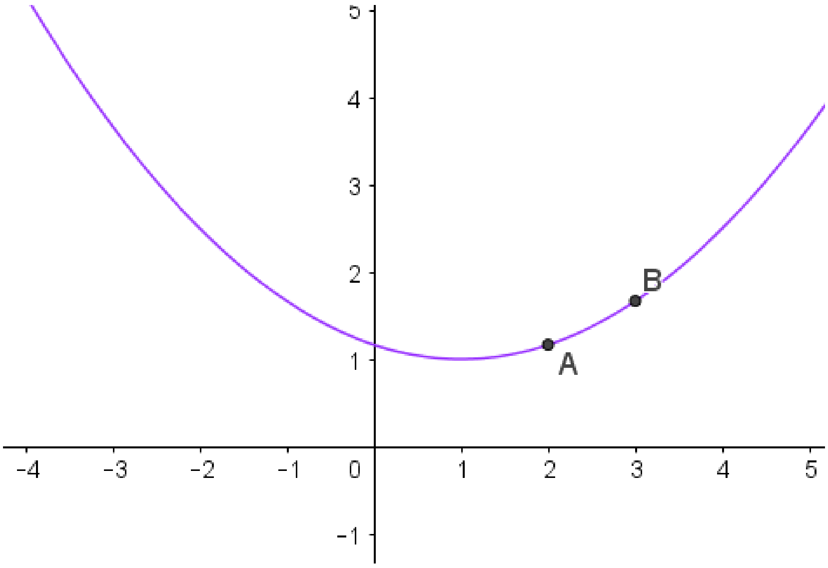
## Ejemplo 7

*En la función* $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{6}+1$, *dibujar la recta tangente en el punto x=2.*

*Realizar una construcción para obtener la tasa de variación media en el intervalo [2, 3].*

*Comprobar que la tasa de variación instantánea en x=2 es el límite de la tasa de variación media cuando la amplitud del intervalo tiende a 0.*

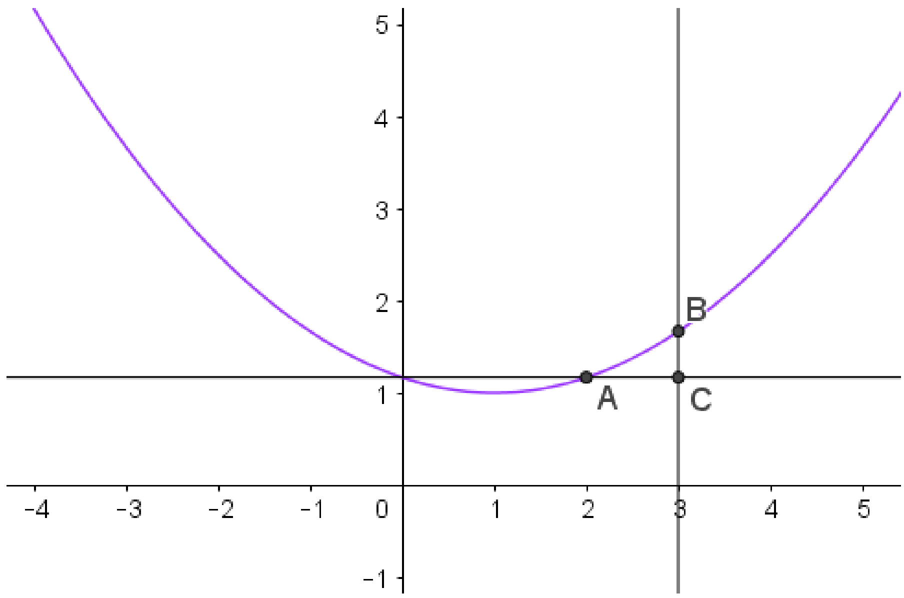
Introducimos la función y marcamos los puntos de abscisas 2 y 3. Para ello, a través de la línea de entrada introducimos (2, f(2)) y (3, f(3)).



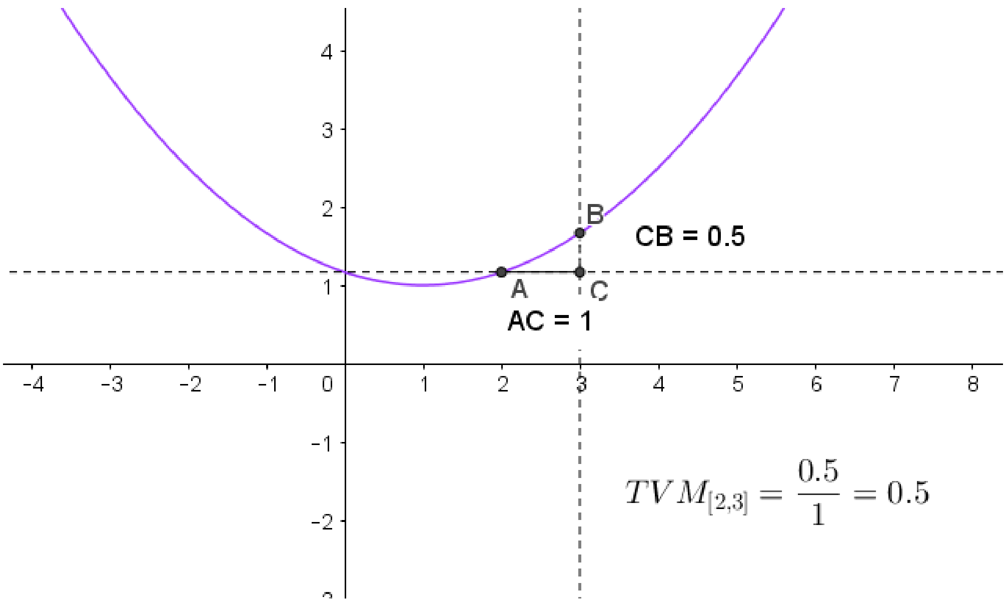
La tasa de variación media en el intervalo [2, 3] se obtiene mediante el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$.

Por tanto, la tasa de variación media TVM en el intervalo [3,2] será $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{0.5}{1} = 0.5$

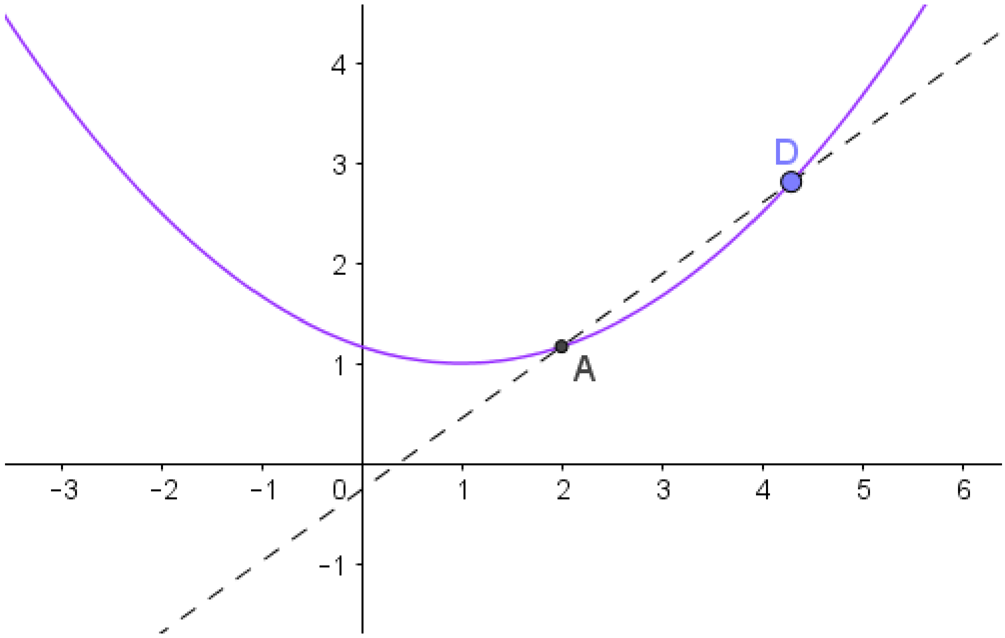
Para realizar una construcción que devuelva el valor de la TVM en este intervalo, bastará con trazar las rectas perpendiculares al eje Y por el punto A y la perpendicular al eje X por el punto B, determinando el punto C de intersección.

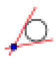


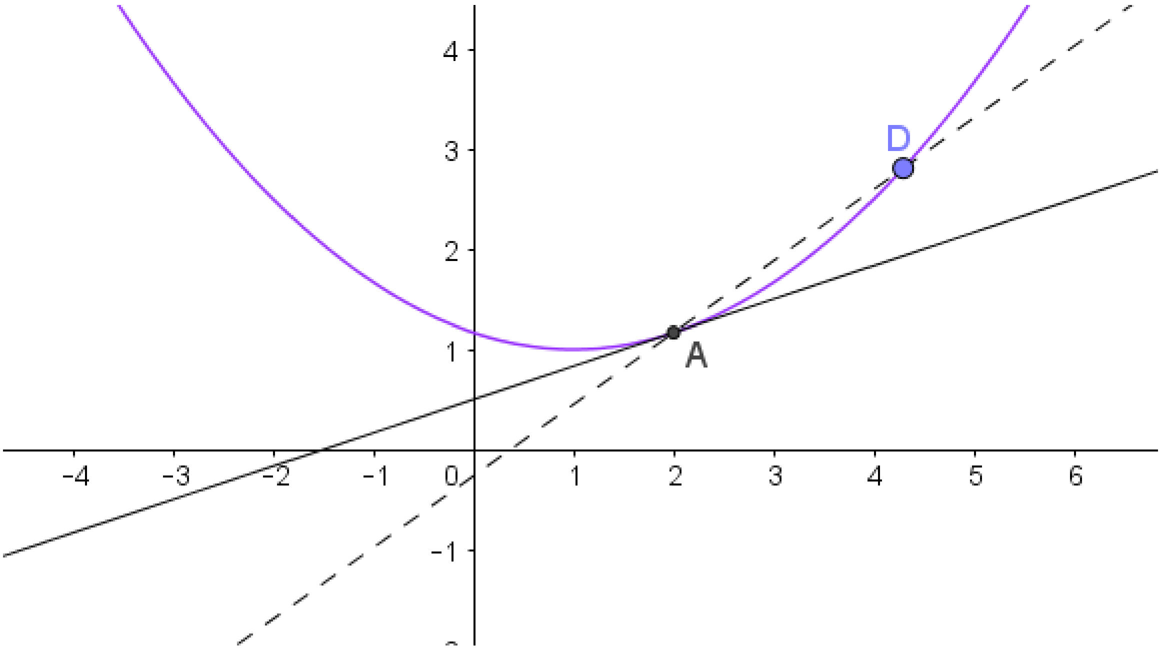

Sólo nos queda trazar los segmentos BC y AC, determinando el cociente entre ambos, que será el valor de la TVM.



Para comprobar la relación con la velocidad instantánea, situamos un nuevo punto D en la curva, trazando la recta que pasa por A y D. Ocultamos los objetos creados anteriormente.

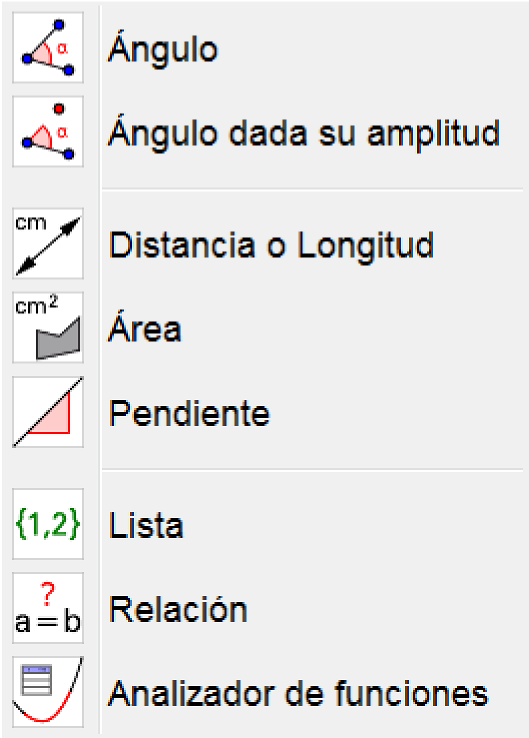


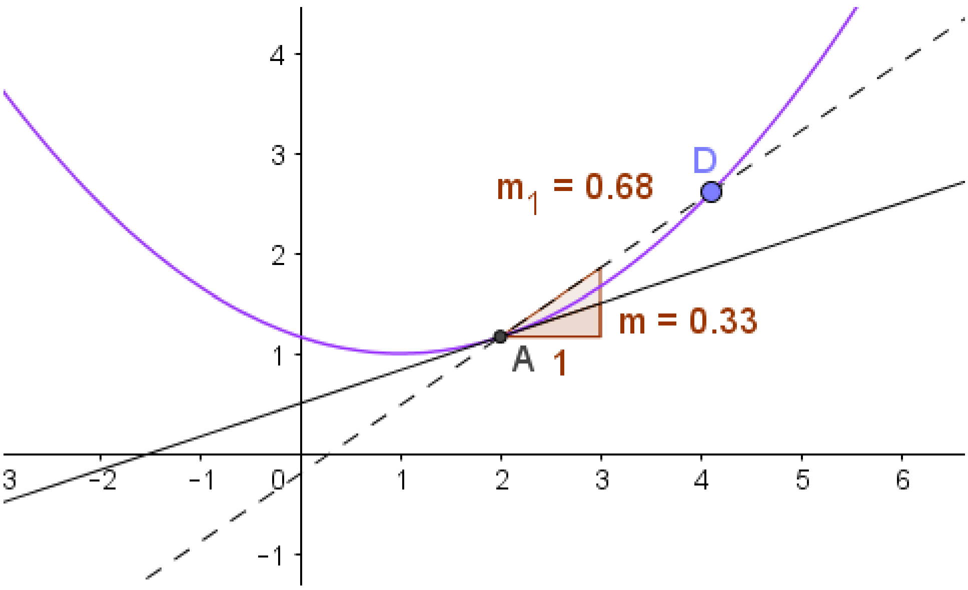

Utilizando la herramienta **Tangentes** , trazamos la recta tangente a f(x) por el punto A.



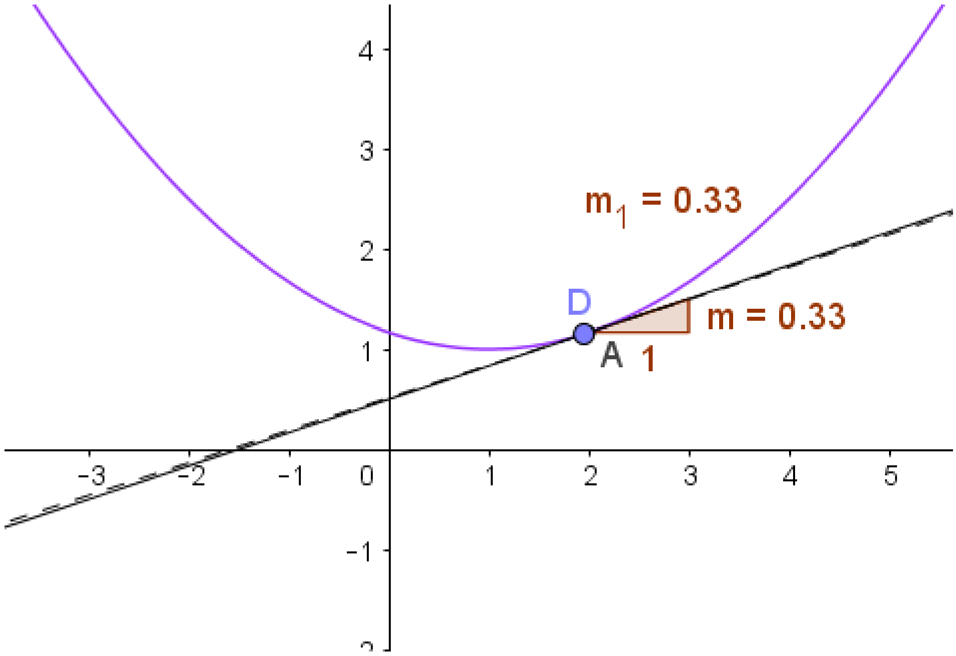

Desplazando el punto D sobre la función hasta que se acerque al punto A podemos comprobar que la recta secante AD tiende a la recta tangente en A.

La pendiente de cada una de las rectas anteriores se puede obtener con la herramienta del mismo nombre, disponible en el bloque de medidas.

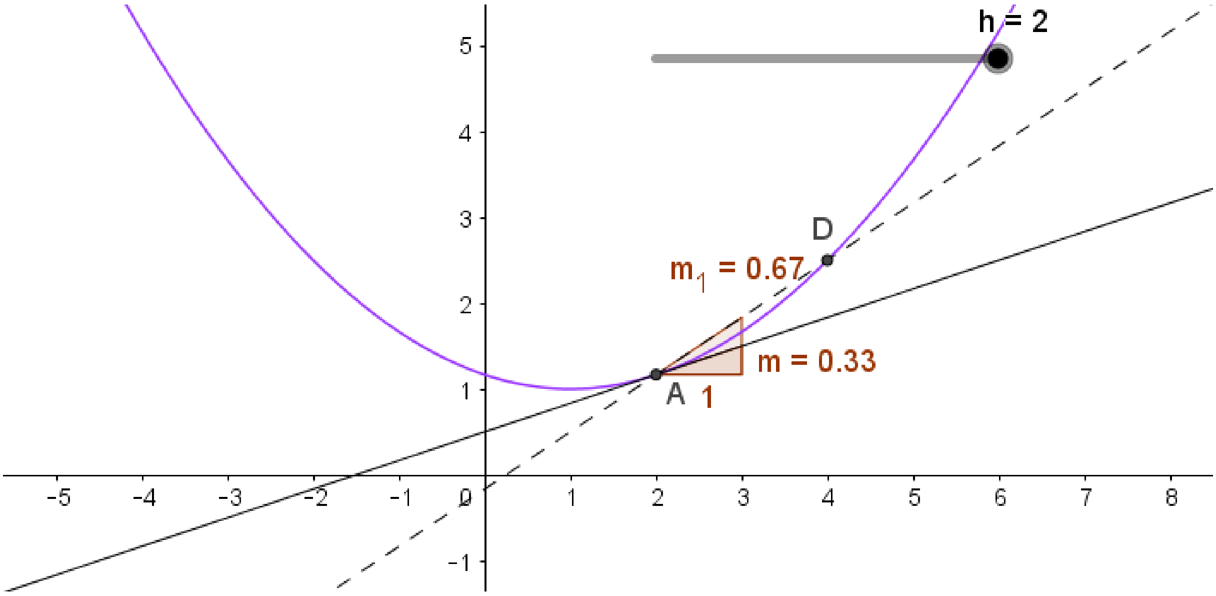



Podemos observar que al desplazar el punto D para acercarlo a A, la pendiente de la recta secante tiende a la pendiente de la tangente.




También podríamos incluir un deslizador para representar el incremento del intervalo, tal y como aparece en la imagen siguiente:




La única dificultad estaría en relacionar el punto D con el punto A y con el incremento h. Para ello, el punto D será (x(A)+h, f(x(A)+h)). La expresión x(A) hace referencia a la abscisa del punto A, mientras que y(A) hará referencia a la ordenada.

**Ejemplo 8**

*Una persona lanza dos bolas simultáneamente. La altura en metros de las bolas viene dada por las expresiones siguientes, en las que el tiempo está expresado en segundos.*

$$a(t) = 3t - \frac{t^2}{4} + 2 \qquad\qquad b(t) = 8t - t^2 + 2$$

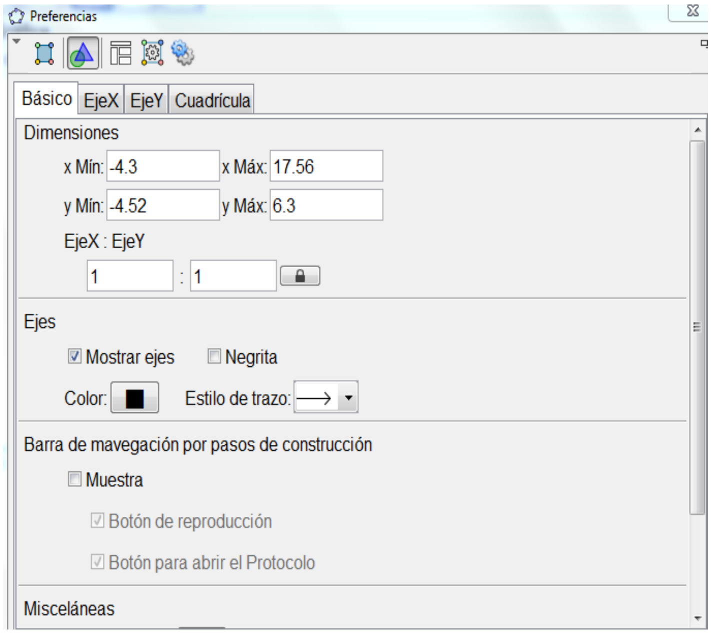
a. *Representa la gráfica de las dos funciones.*
b. *¿Cuál de las dos bolas alcanza mayor altura.*
c. *¿En qué instante las dos bolas están a la misma altura?*
d. *Determina, de manera aproximada, la máxima distancia entre las dos bolas y el instante en el que se alcanza.*

Comenzamos definiendo las dos funciones que determinan la altura de las bolas.

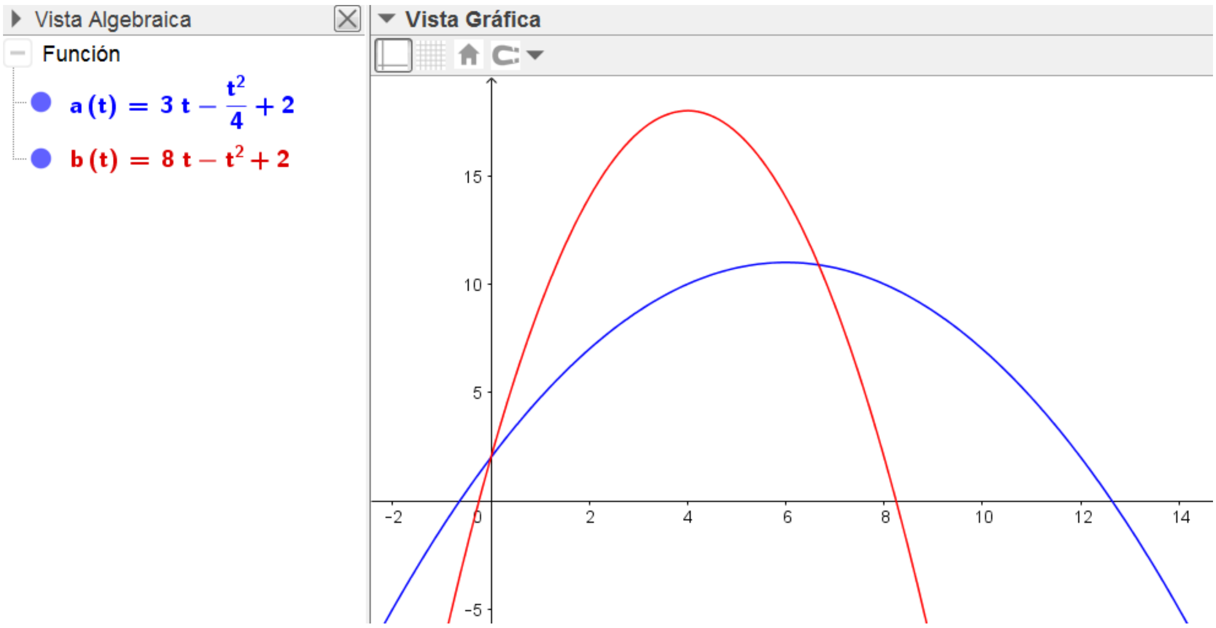
Al igual que en el ejemplo anterior, es necesario ajustar los valores de los ejes y la escala para obtener una buena representación de la función.

Además, las funciones debemos estudiarlas para valores positivos del tiempo y de la altura, por lo que podemos ajustar los ejes de manera que aparezcan representados los valore que nos interesen, una vez que previamente se haya realizado un análisis e interpretación de las funciones.

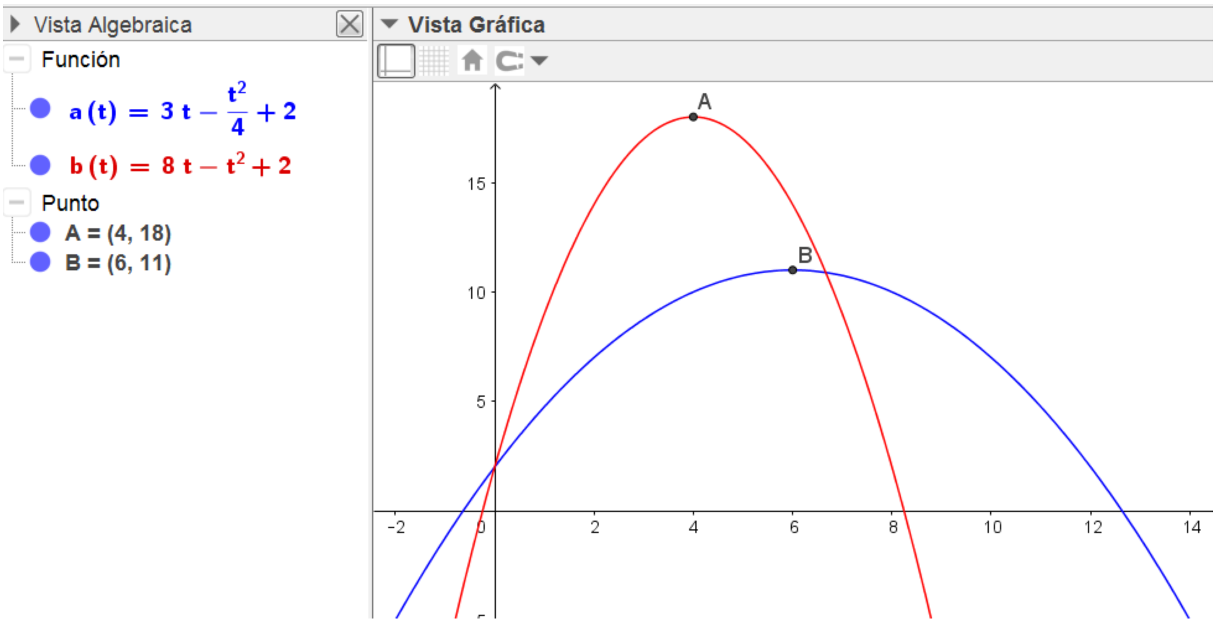
Al pulsar el botón derecho sobre una zona libre de la ventana gráfica, seleccionamos **Vista gráfica**, aparecerán las opciones que muestra la siguiente imagen, en las que podemos establecer los valores que deseamos para cada uno de los ejes.




Una vez ajustados, obtendremos la representación de las funciones que puede ser similar a las que aparecen a continuación:

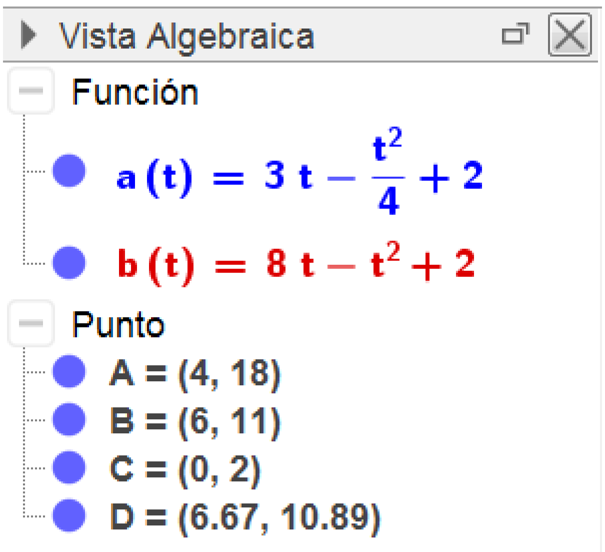



Observando la gráfica podemos determinar que la segunda bola, la que corresponde a la función b(t) alcanza mayor altura. Para determinar el máximo basta con utilizar el comando **Extremo** para cada una de las funciones o la herramienta **Extremos relativos**.

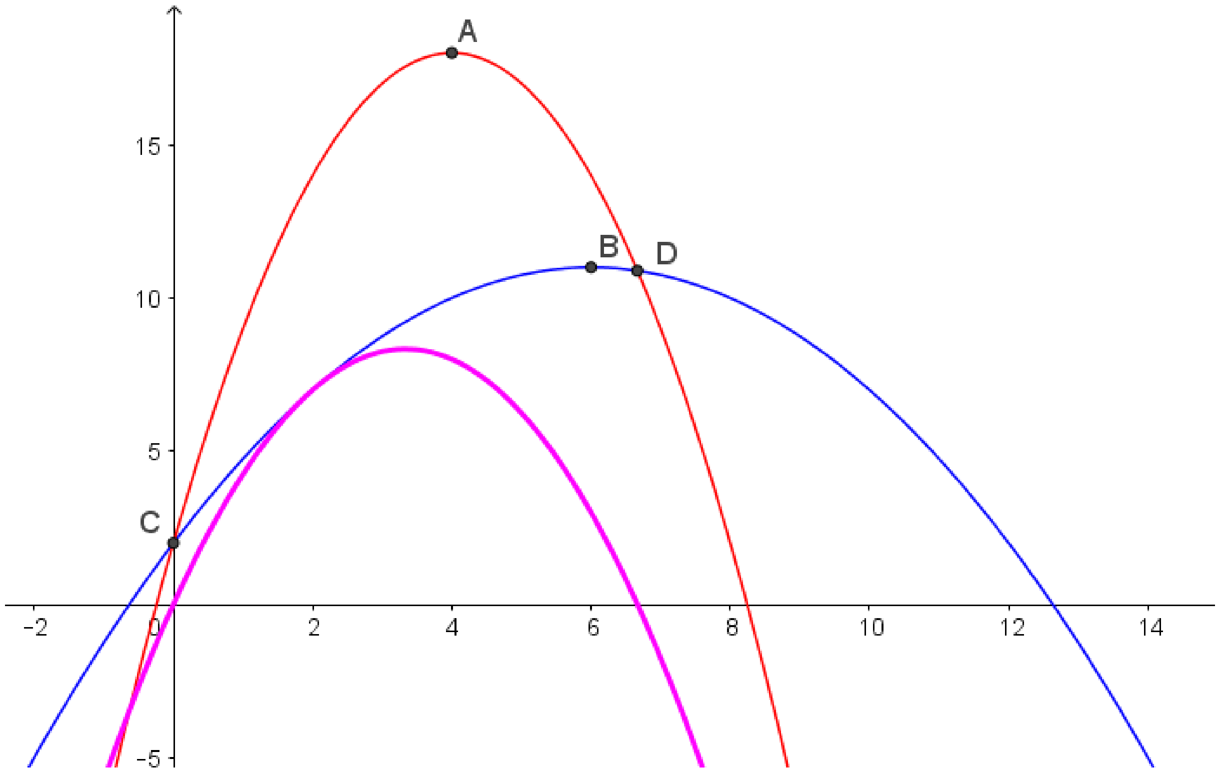



Por tanto la mayor altura la alcanza la función b, que alcanza 18 metros mientras que a alcanza solo 11.

Para determinar el instante en el que las dos bolas tienen la misma altura solo hay que encontrar los puntos de intersección, que corresponden con los puntos cuyas coordenadas son (0,2) y (6.67, 10.89). Por tanto, la misma altura se alcanza en el instante inicial y a aproximadamente a los 6.67 segundos.

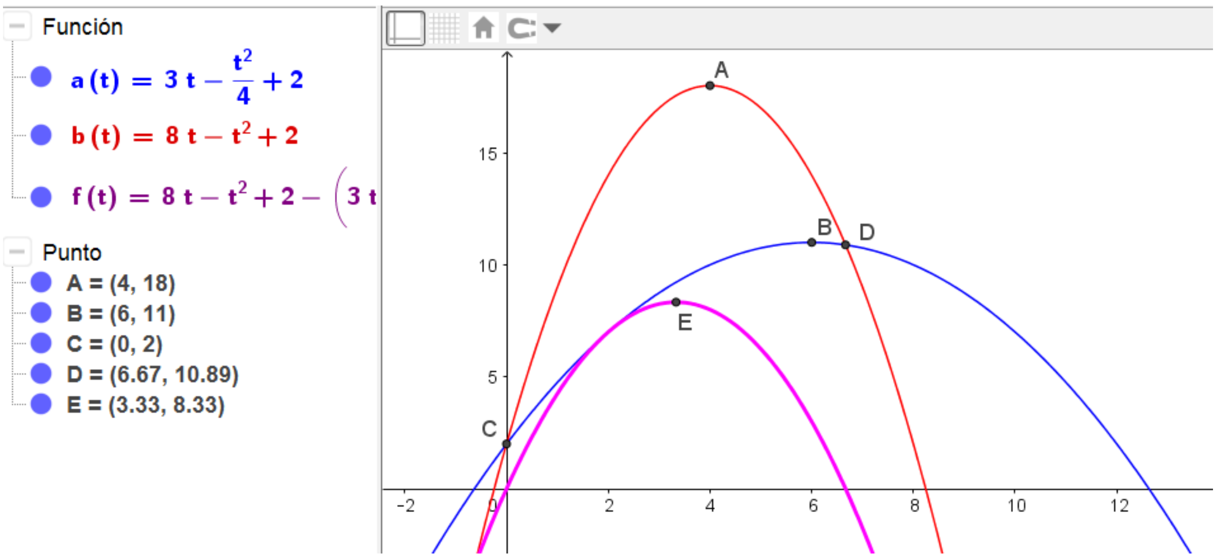



Y para la última cuestión, definimos una nueva función que corresponda a la diferencia de alturas b(t)-a(t).




De esta función basta calcular el máximo para determinar la mayor distancia y el tiempo en el que produce.

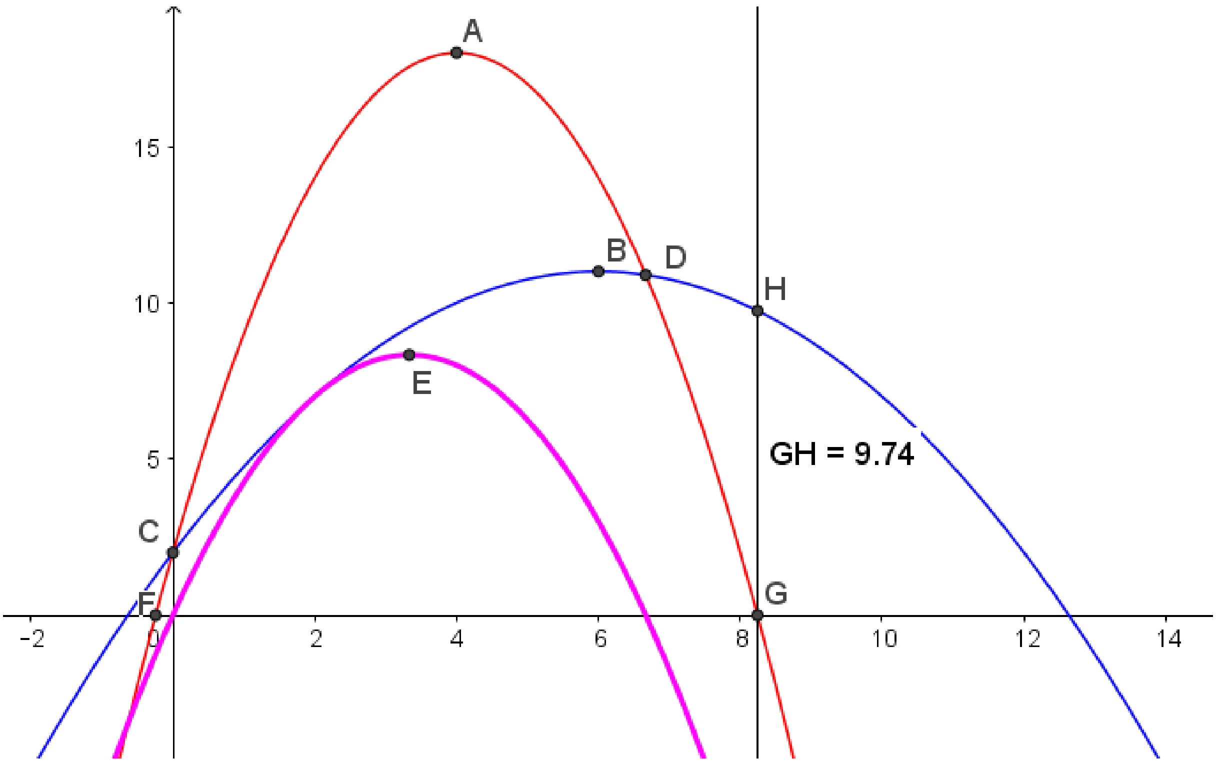
El resultado que devuelve el programa corresponde al punto de coordenadas (3.33,8,33), lo que significa que la máxima distancia es 8,33 metros que se alcanza a los 3.33 segundos.



Para comprobar si el punto E es el que da la máxima distancia entre las dos bolas, sólo nos queda comprobar la distancia que existe entre ellas cuando la segunda bola llega al suelo.

Para ello, obtenemos el punto de corte de la función b(t) con el eje X o utilizamos la herramienta **Raíces**. Aunque obtenemos los puntos F y G, despreciamos el primero, como es evidente al ser un punto con abscisa negativa.

Para el punto G tenemos que determinar la distancia a la curva a(t), para lo que trazamos la recta perpendicular al eje X por el punto G, hallando a continuación, el punto de intersección H, y la distancia entre G y H.




Observamos que la distancia entre G y H es de 9,74 m, por lo que es la mayor distancia entre las dos bolas.

## Ejemplo 9

*Un cuerpo que inicialmente está en reposo es proyectado en línea recta desde un punto A.*

*Después de t segundos de movimiento, el cuerpo se encuentra a una distancia en metros del punto A dada por la expresión:* $s(t) = -2t^3 + 10t^2$

.

*Representa la función en el intervalo (0, 5).*

*Determina:*

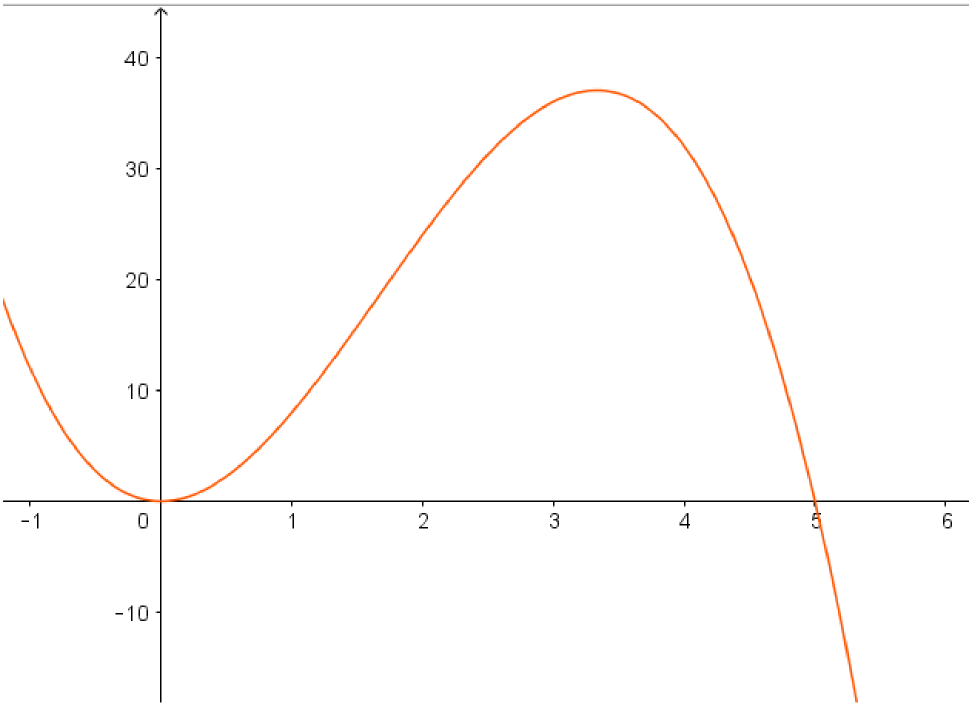
*a. La distancia recorrida después de 2 segundos.*

*b. La velocidad del cuerpo en el instante t=2 segundos.*

c. *La aceleración del cuerpo en t = 2.*

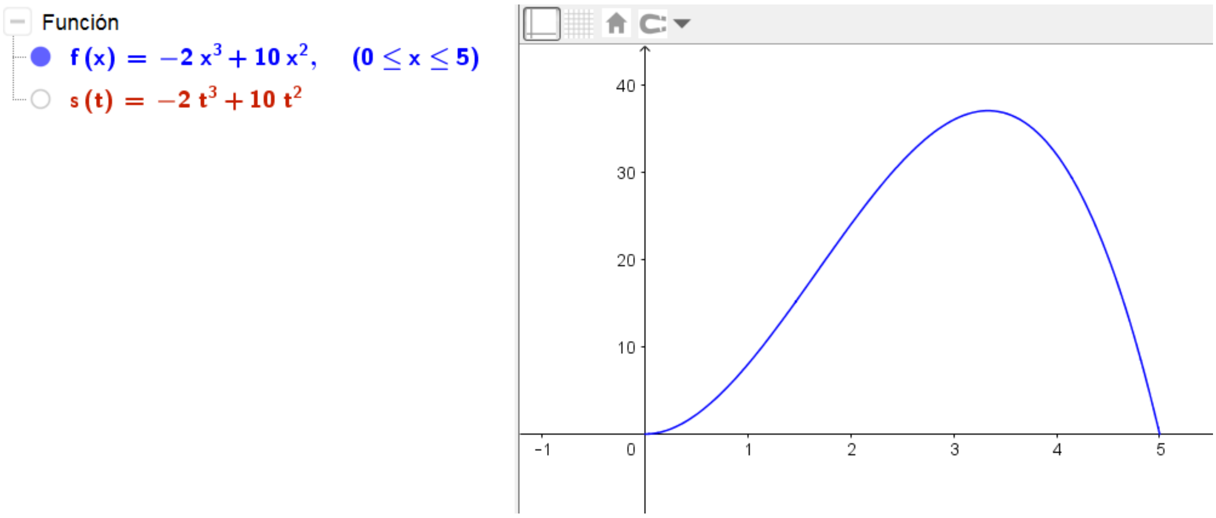
d. *Hallar el instante en el que el cuerpo está momentáneamente en reposo.*

Comenzando definiendo la función s(t), ajustando la escala para mejorar la vista de la representación de la función.




Para obtener la función en el intervalo (1,5), definimos una función auxiliar con ayuda del comando Función, ocultando a continuación la función s(x) definida previamente.

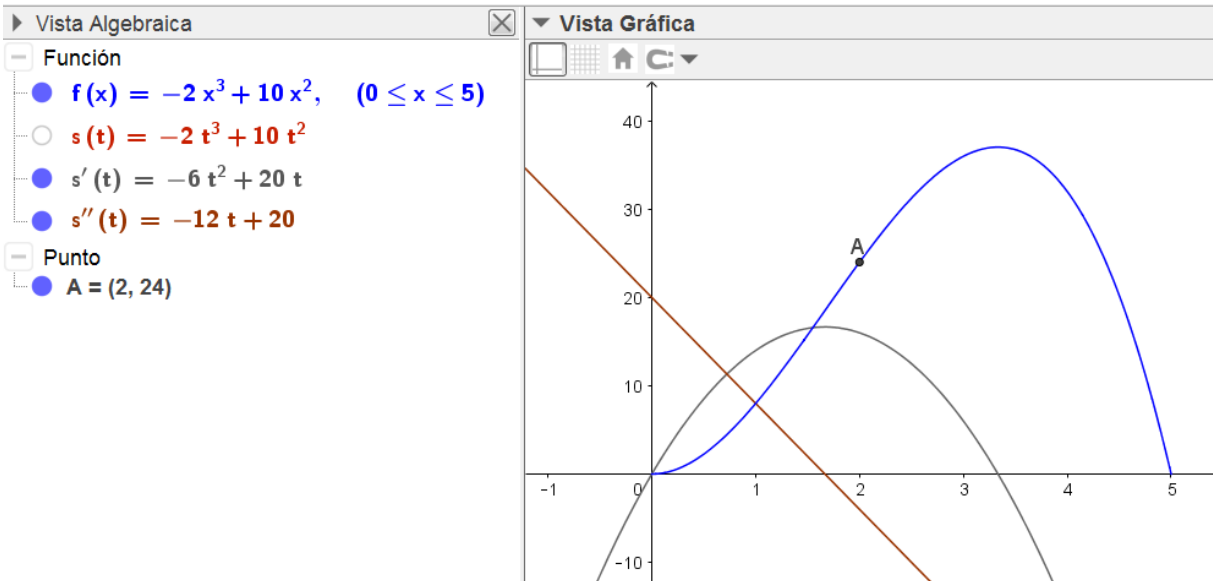
Escribiremos **Función(s(t), 0, 5)**.



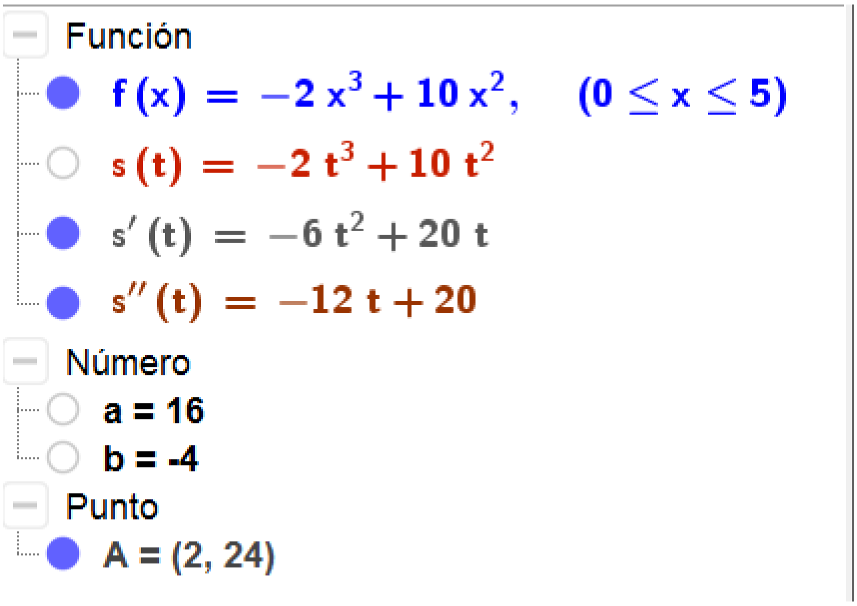

Para obtener la distancia recorrida después de dos segundos, basta calcular el valor de la función para t = 2 o representar el punto (2, f(2)).

Obtenemos que el punto tiene de coordenadas (2,24), por lo que la distancia recorrida es de 24 metros.

La velocidad en un punto se obtiene a partir de la primera derivada y la aceleración a partir de la segunda, por lo que obtenemos y representamos las dos primeras derivadas de la función inicial.

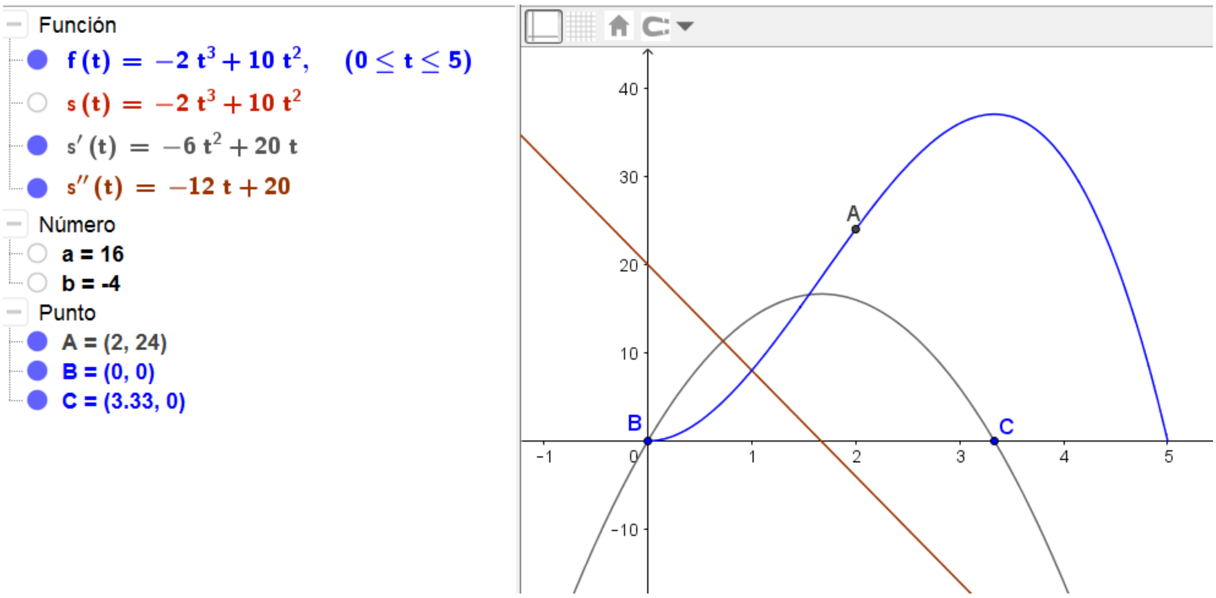



Obtenemos el valor de las funciones anteriores para t = 2, cuyos resultados observamos en la imagen siguiente:




Por tanto la velocidad es de 16 m/s y la aceleración es de -4 m/$s^2$.

Los instantes en los que el cuerpo esté en reposo corresponderán con aquello puntos en los que la velocidad instantánea es cero, por lo que basta encontrar las raíces de la función velocidad instantánea (primera derivada) que corresponderán con los extremos de la función inicial.




Por tanto el cuerpo estará en reposo en el instante t = 3.33 segundos.

### Polinomios de Taylor

Los podemos obtener a partir del comando **PolinomioTaylor** que se puede utilizar tanto en la vista de CAS como a través de la línea de entrada.

La sintaxis de este comando es:

**PolinomioTaylor(f, x, a, n)**

**PolinomioTaylor(f, a, n)**

que devolverá la expresión:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

que corresponde a la polinomio de Taylor de grado *n* de la función *f* en el punto *x = a*.

### Ejemplo 10

*Calcula los polinomios de Taylor de las funciones siguientes, para el punto y el orden indicados.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a.* | *f(x) = sen x* | *a = π* | *n = 5* |
| *b.* | *f(x) = tg x* | *a = 0* | *n = 7* |
| *c.* | *f(x) = ln(1+x)* | *a = 0* | *n = 8* |

Bastará utilizar el comando **PolinomioTaylor** para obtener la expresión de los polinomios para cada una de las funciones, indicando los argumentos correspondientes a cada caso.

Las expresiones las podemos obtener a través de la línea de entrada o desde la vista CAS.

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|---|---|
| 1 | PolinomioTaylor(sen(x), π , 5)<br>$\rightarrow\ -x+\pi+\frac{1}{6}\ (x-\pi)^3-\frac{1}{120}\ (x-\pi)^5$ |
| 2 | PolinomioTaylor( tg(x), 0, 7 )<br>$\rightarrow\ x+\frac{1}{3}\ x^3+\frac{2}{15}\ x^5+\frac{17}{315}\ x^7$ |
| 3 | PolinomioTaylor(ln(1+x), 0, 8)<br>$\rightarrow\ x-\frac{1}{2}\ x^2+\frac{1}{3}\ x^3-\frac{1}{4}\ x^4+\frac{1}{5}\ x^5-\frac{1}{6}\ x^6+\frac{1}{7}\ x^7-\frac{1}{8}\ x^8$ |

**Ejemplo 11**

*Halla los polinomios de Taylor de grado menor o igual que cuatro de la función $f(x)=e^x$, en el punto $x = 0$.*

*Representar los polinomios y la función $f(x)=e^x$.*

Para calcular los sucesivos desarrollos de Taylor, bastará con ejecutar la instrucción:

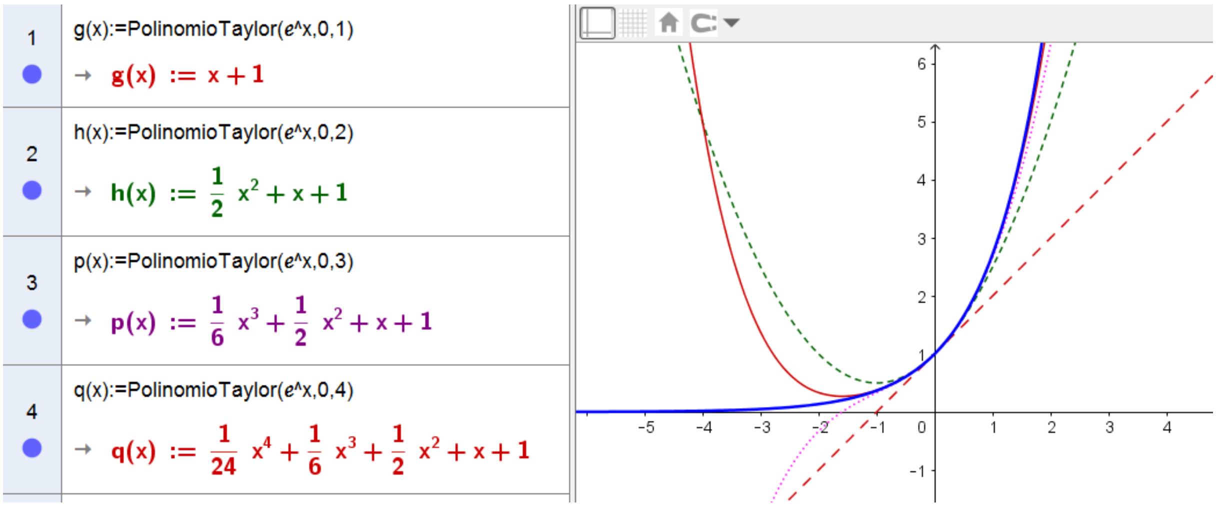
**PolinomioTaylor( $e^x$, x, 0, n)**

dando a *n* los valores 1, 2, 3 y 4.

| Cálculo Simbólico (CAS) | |
|---|---|
| 1 | PolinomioTaylor( *e* ^x,0,1)<br>$\rightarrow\ 1+x$ |
| 2 | PolinomioTaylor( *e* ^x,0,2)<br>$\rightarrow\ 1+x+\frac{1}{2}\ x^2$ |
| 3 | PolinomioTaylor( *e* ^x,0,3)<br>$\rightarrow\ 1+x+\frac{1}{2}\ x^2+\frac{1}{6}\ x^3$ |
| 4 | PolinomioTaylor( *e* ^x,0,4)<br>$\rightarrow\ 1+x+\frac{1}{2}\ x^2+\frac{1}{6}\ x^3+\frac{1}{24}\ x^4$ |

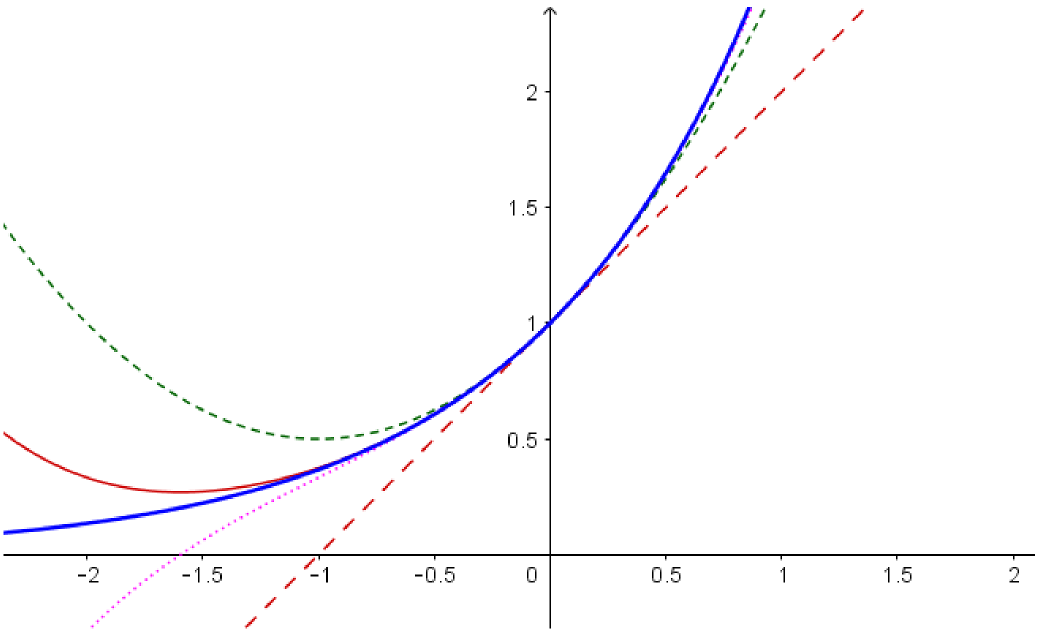
Para no tener que escribir la misma expresión en cada una de las líneas, se podrá utilizar la tecla **=** que copia en la línea de entrada la última expresión de entrada, por lo que sólo hay que cambiar el grado para obtener el nuevo polinomio.

A continuación, aprovechando las opciones de representación gráfica para observar el grado de aproximación de los polinomios con la función.




La función $f(x)=e^x$ se puede definir a través de la línea de entrada o como una expresión más en la vista CAS. En la vista CAS para definirla será necesario escribir $f(x):=e^x$.

Solo nos queda efectuar un zoom para observar las aproximaciones en un entorno del valor estudiado, en nuestro caso el 0.



## Polinomio de interpolación

El comando **Polinomio** cuando se aplica sobre una lista de n puntos devuelve el polinomio de interpolación de grado n-1.

Una lista se expresa escribiendo los puntos entre llaves y separados por comas. Los puntos pueden introducirse en la lista a través de su nombre o de sus coordenadas:

**{A, B, C, D}** o **{($x_1$,$y_1$), ($x_2$,$y_2$), ($x_3$,$y_3$), ($x_4$,$y_4$)}**

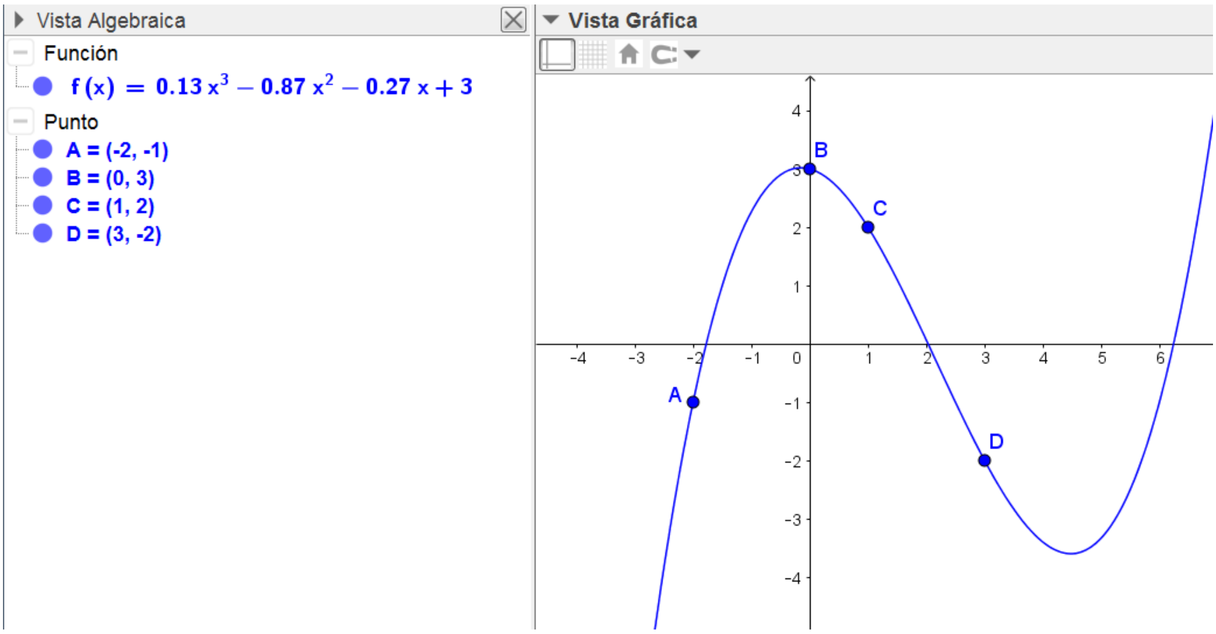
## Ejemplo 12

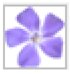
*Obtén el polinomio de interpolación de los puntos A(-2,-1), B(0,3), C(1,2) y D(3,-2).*

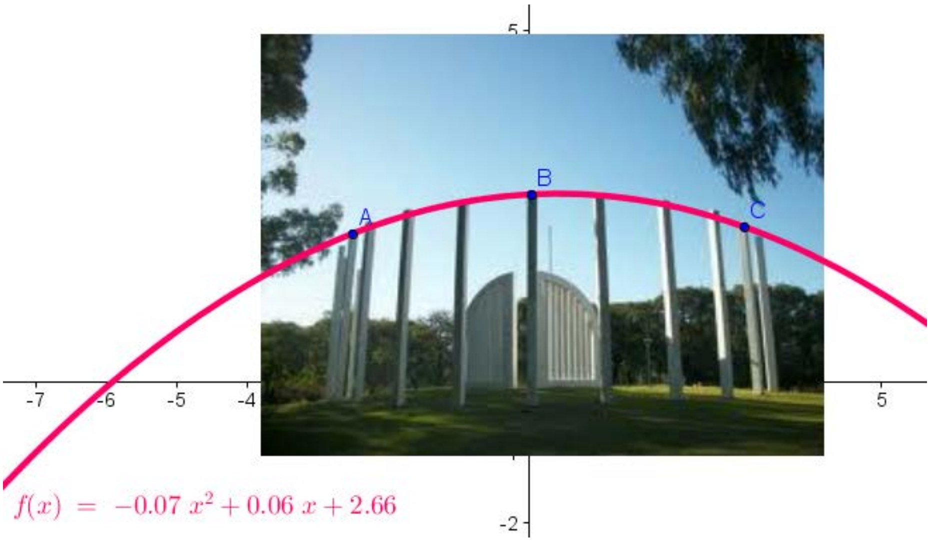
Para obtener el polinomio de interpolación bastará con introducir los puntos anteriores a través de la línea de comandos, utilizando a continuación el comando **Polinomio**.

**Polinomio(A,B,C,D)** o **Polinomio({A,B,C,D})**

Además de la expresión del polinomio de interpolación aparecerá su gráfica, como podemos observar en las dos imágenes siguientes:



Este comando permitirá ajustar una curva sobre una figura de la realidad que previamente hemos insertado en la vista gráfica utilizando la herramienta **Inserta imagen** .



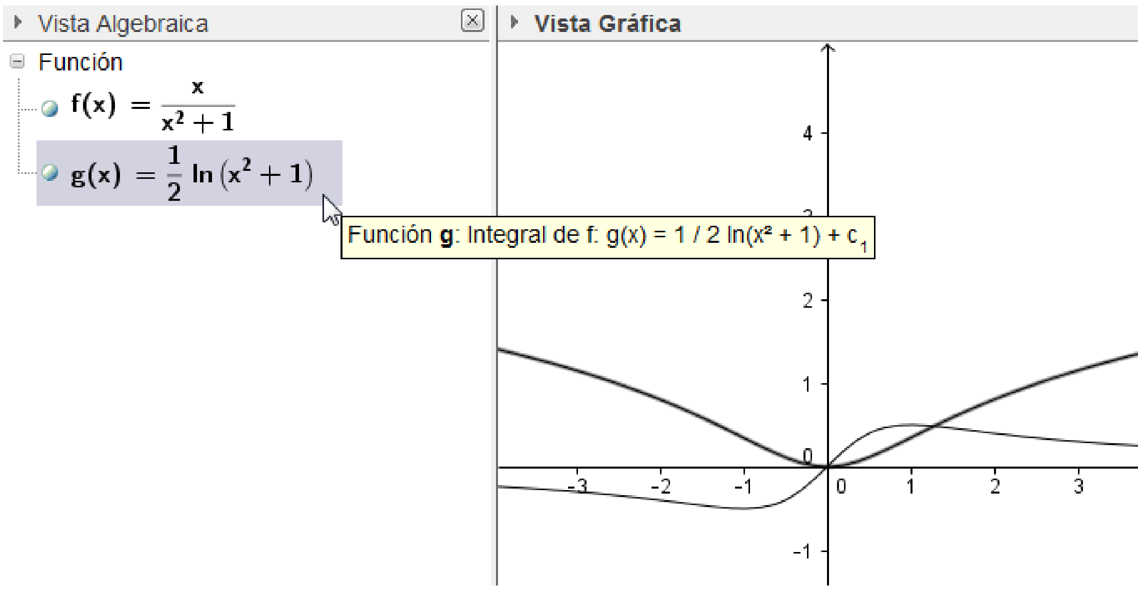

## Integración

Sin necesidad de recurrir a las opciones que ofrece la versión de CAS, GeoGebra devolverá la integral indefinida de una función.

Para obtener la función integral hay que utilizar el comando Integral cuya sintaxis es:

**Integral(f(x))**

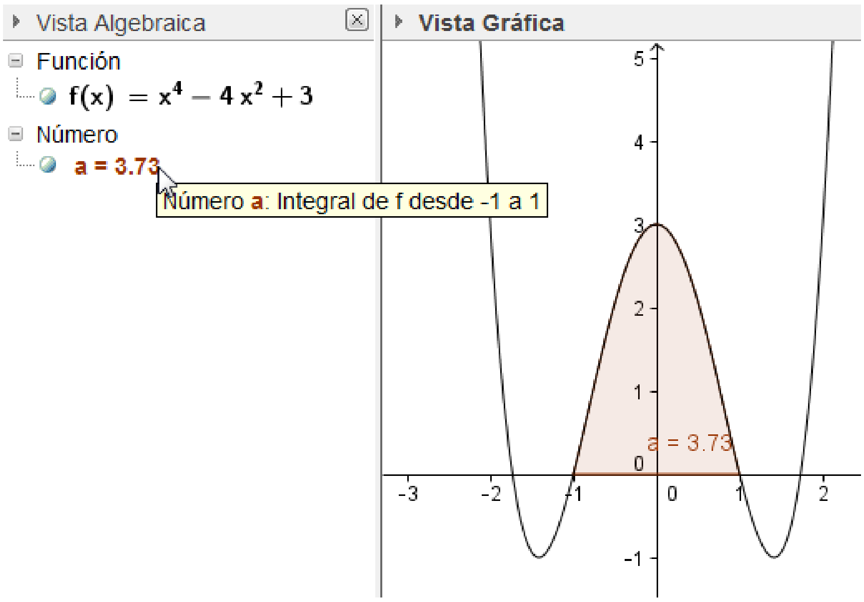
Además de devolver la expresión de la integral, la representará en la vista gráfica como podemos observar en la imagen siguiente:



Además, podemos determinar el valor de una integral definida, así como, representar las sumas inferiores y superiores, que seguro ayudarán para exponer y desarrollar el concepto de área bajo una curva.

Para obtener el valor de una integral definida bastará con utilizar el comando anterior, añadiendo los argumentos correspondientes a la variable con respecto a la que integral y los extremos inferior y superior.

**Integral(f(x), a, b)** devolverá el resultado de $\int_a^b f(x)\,dx$.




Para representar las sumas inferiores y las sumas superiores utilizaremos los comandos:

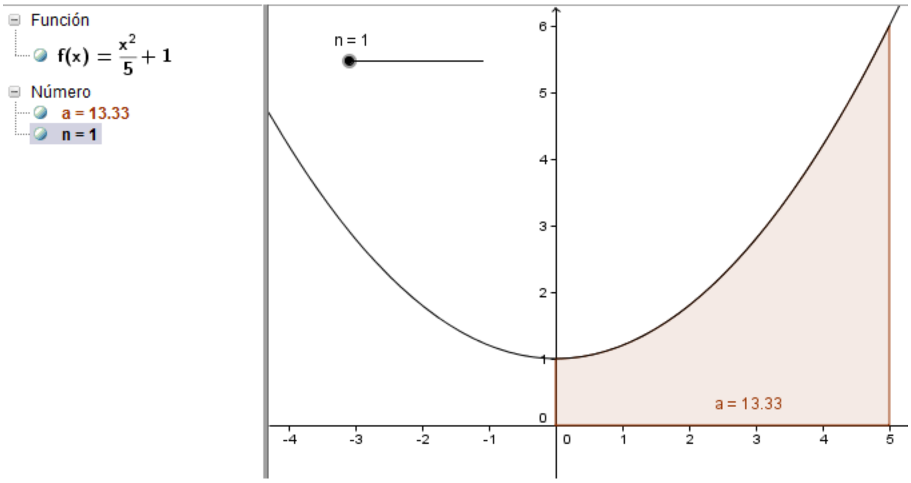
**SumaInferior(f(x), $x_1$, $x_2$, n)**

**SumaSuperior(f(x), $x_1$, $x_2$, n)**

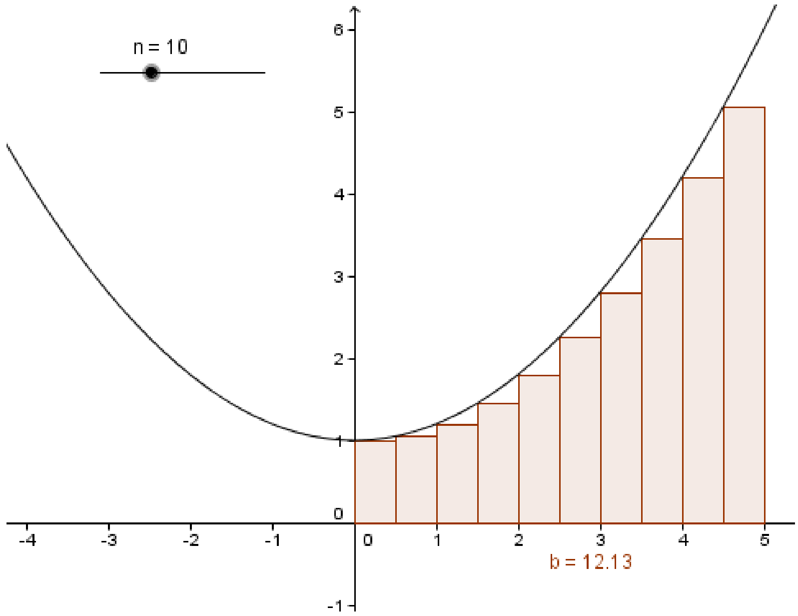
En los que además de la función, hay que incluir los argumentos correspondientes al intervalo ($x_1$, $x_2$) y n representa el número de particiones.

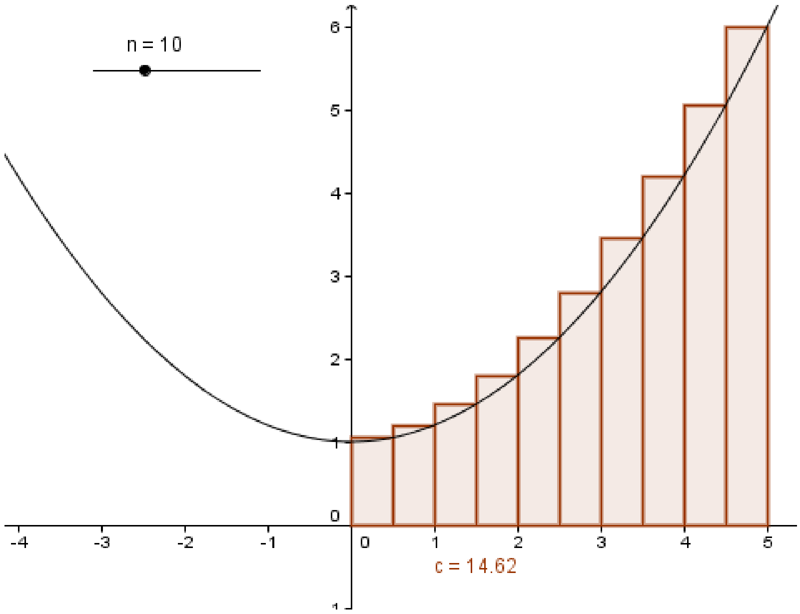
En las imágenes siguientes observamos los resultados que obtendremos al aplicar los comandos anteriores para obtener el valor de la integral, y para representar y calcular las sumas inferiores y superiores de una función, para lo cual necesitamos un deslizador que establezca el número de particiones.

En la siguiente imagen aparece el valor y el área representada por la integral definida.

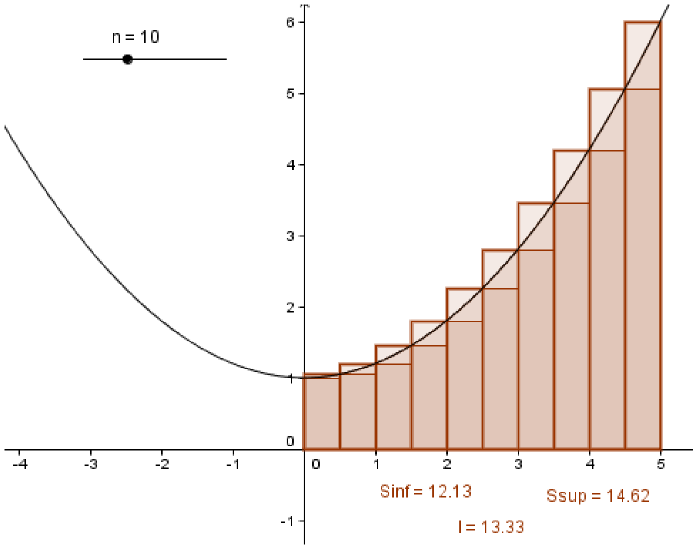



En la imagen siguiente, aparecen los rectángulos correspondientes a las sumas inferiores y superiores de la función.

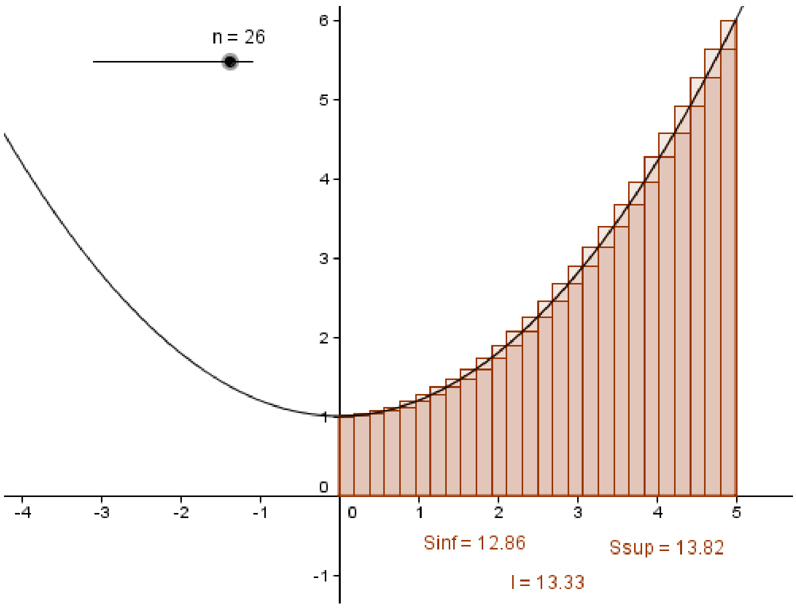


Mostrando los tres valores y las tres representaciones de manera simultánea, cambiando previamente el nombre a los valores obtenidos, conseguiremos una buena herramienta para exponer estos contenidos.



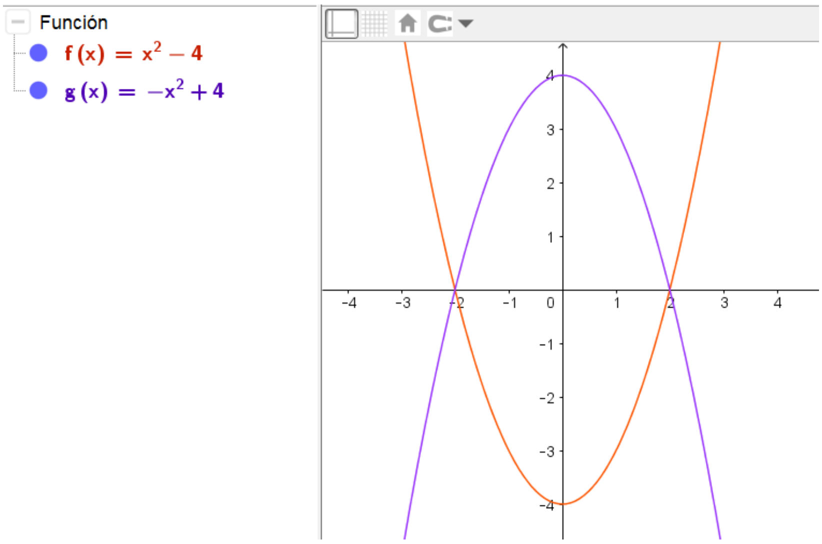

Aumentando el número de particiones, para lo cual solo hay que variar el deslizador, observaremos la convergencia de las sumas inferiores y superiores hacia el valor de la integral.




**Ejemplo 13**

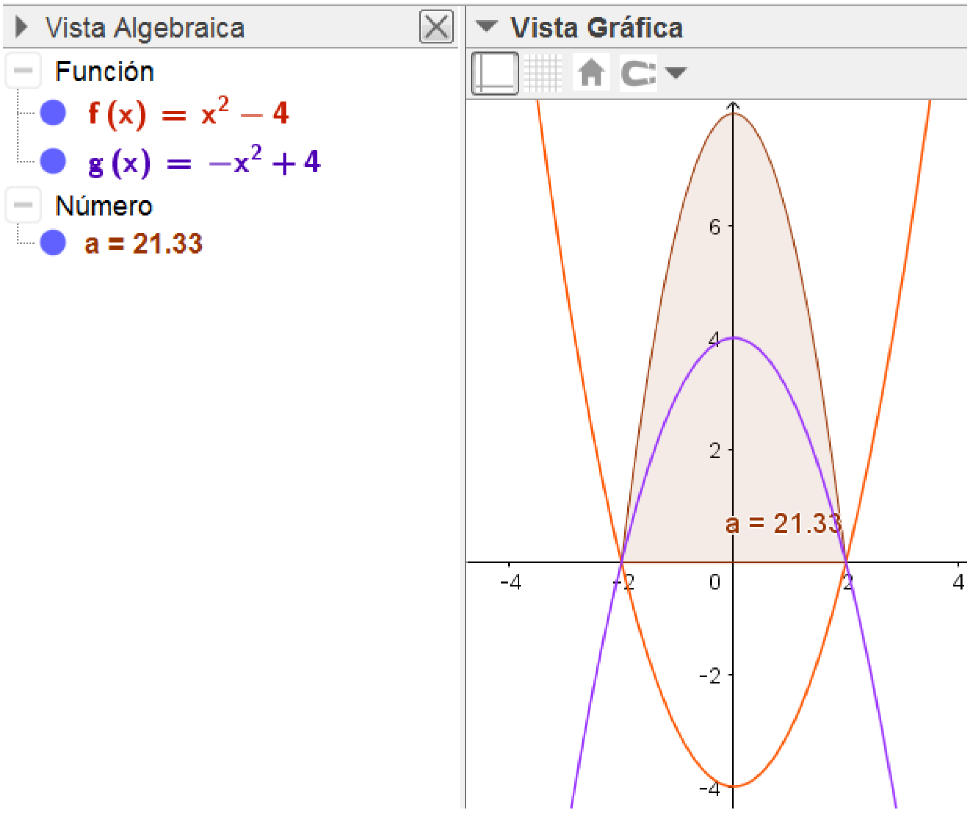
Hallar el área encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -x^2 + 4$.

Comenzamos representando las dos funciones correspondientes a las parábolas, introduciendo sus expresiones a través de la línea de entrada.




Para obtener el área, bastaría con aplicar el comando **Integral** a la función $g(x)-f(x)$ en el intervalo (-2, 2), que claramente corresponden a los puntos de corte que previamente podemos obtener como intersección de las dos funciones.

Obtendremos el resultado que aparece en la imagen siguiente:



GeoGebra ofrece el comando **IntegralEntre** para hallar el valor del área encerrada entre dos curvas.

La sintaxis de este comando es:

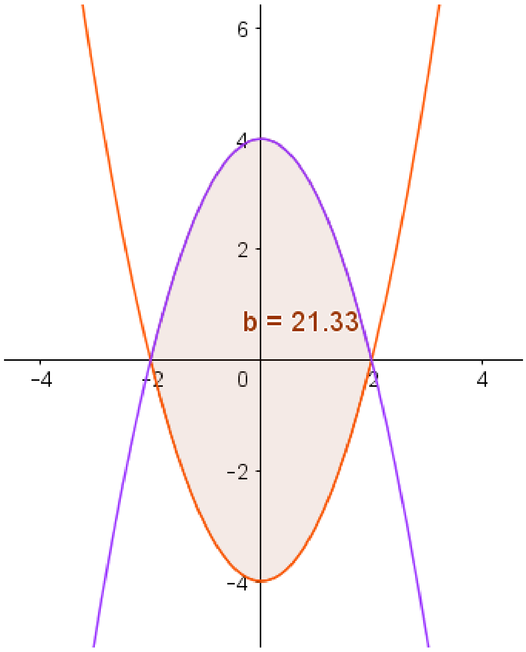
**IntegralEntre(f(x),g(x),a,b)**

para obtener el valor de $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

En este ejemplo, para obtener el área y su representación, bastará con ejecutar en la línea de entrada el comando:

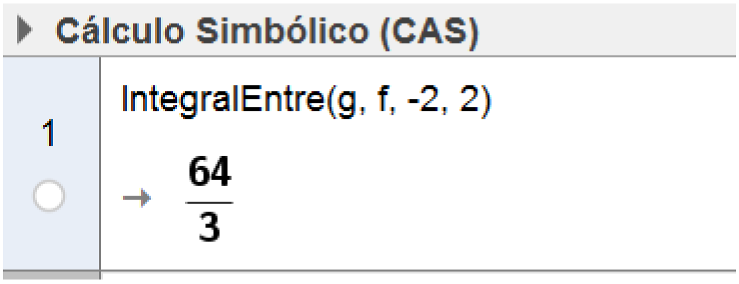
**IntegralEntre(f, g, -2, 2)**

El resultado aparece en la imagen siguiente:




Entre las aplicaciones que se pueden resolver a través del CAS de **GeoGebra**, se encuentra la resolución de problemas de cálculo integral.

El ejemplo anterior al ejecutar el mismo comando desde la vista CAS, el resultado aparecerá en forma exacta, tal y como mostramos en la imagen siguiente:



Es lógico pensar que aquellas integrales que requieran métodos sofisticados para su resolución, no serán calculadas mediante las reglas disponibles en el núcleo del programa, por lo que, en ocasiones, será necesario utilizar las librerías específicas de cálculo integral.

Para hallar la función primitiva de una función con respecto a una variable se utilizará el botón $\int$ **Integral** disponible en la barra de herramientas.

| | |
|---|---|
| 7 | x³ -2 x |
| ○ | Integral, x: $\frac{1}{4}x^4 - x^2 + c_1$ |

También disponemos del comando del mismo nombre para obtener primitivas de una función o para obtener el valor de una integral definida.

Integral[ <Función> ]
Integral[ <Función>, <Variable> ]
Integral[ <Función>, <Valor Inicial de x>, <Valor Final de x> ]
Integral[ <Función>, <Variable>, <Valor Inicial de Variable>, <Valor Final de Variable> ]
IntegralEntre[ <Función>, <Función>, <Valor Inicial de x>, <Valor Final de x> ]
IntegralEntre[ <Función>, <Función>, <Variable>, <Valor Inicial>, <Valor Final> ]

| | |
|---|---|
| 8 | Integral[x cos(x)] |
| ○ | → $\cos(x) + \mathrm{sen}(x)\ x + c_2$ |
| 9 | Integral[sin(a x),x] |
| ○ | → $-\frac{\cos(a\ x)}{a} + c_3$ |

De manera análoga se podrán integrar funciones en las que aparezcan parámetros como ocurre con el último ejemplo de la imagen anterior.

Este mismo comando permite calcular integrales definidas.

| | |
|---|---|
| 10 | Integral[x²+1,x,0,3] |
| ○ | → $12$ |
| 11 | Integral[1/(x+2),-1,1] |
| ○ | → $\ln(3)$ |

Observemos que en este caso la sintaxis del comando para calcular una integral definida es:

**Integral(función, variable, extremo inferior, extremo superior)**

**Integral(función, extremo inferior, extremo superior)**

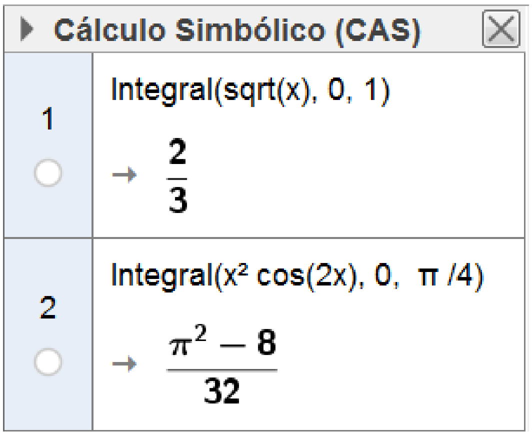
En el segundo caso, cuando la función sea de una sola variable se podrá omitir el argumento correspondiente al nombre de la variable.

### Ejemplo 14

*Calcular:*

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx \qquad\qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x \; dx$$

Para obtener el valor de las integrales definidas anteriores, bastará con ejecutar el comando **Integral**, para cada una de las funciones, en los correspondientes límites de integración.



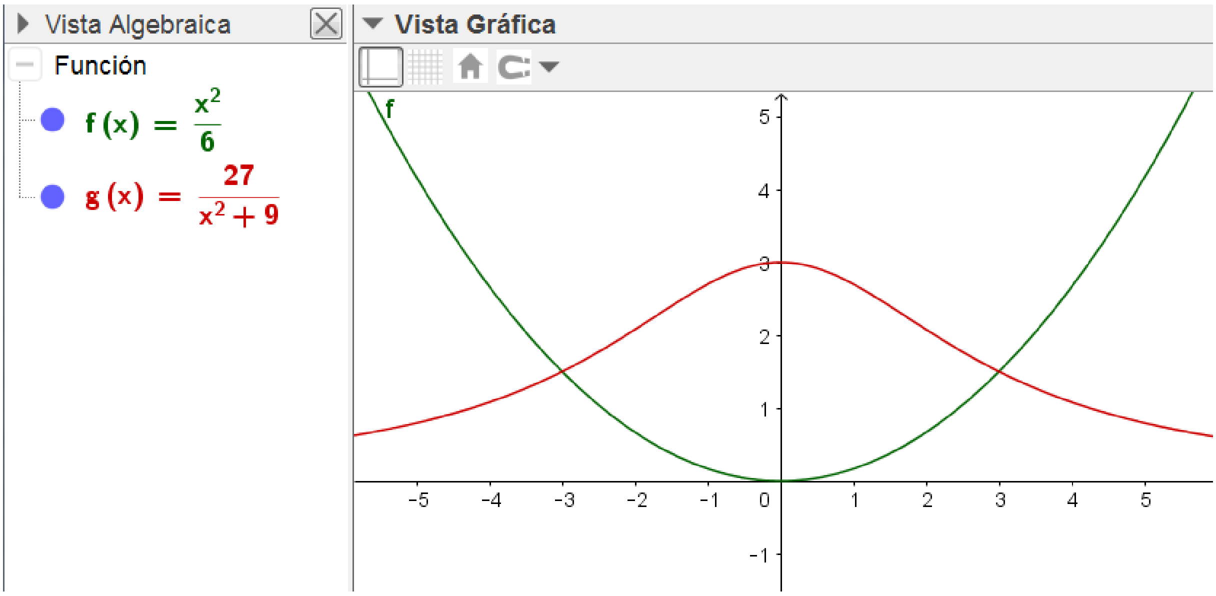

Problemas de cálculo de áreas, longitudes de curvas, volúmenes y otras aplicaciones de la integral definida, se resolverán a través de este comando.

### Ejemplo 15

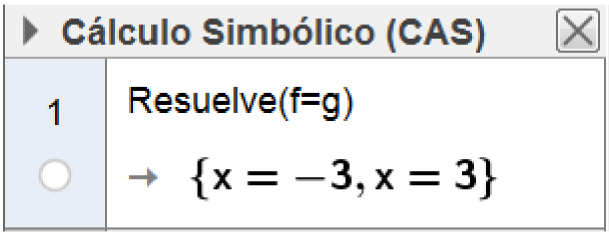
*Hallar el área limitada por las curvas:*

$$f(x) = \frac{x^2}{6} \qquad\qquad g(x) = \frac{27}{x^2 + 9}$$

Al definirlas, aparecerá la representación gráfica de cada una de ellas, lo cual ayuda para observar el recinto del que hay que obtener el área.

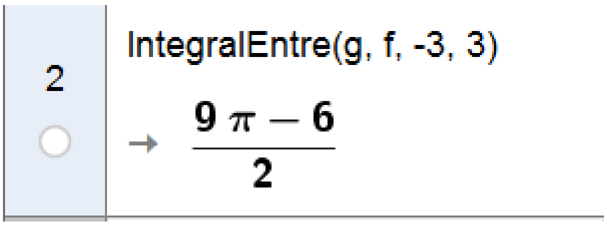



A continuación, buscamos los puntos de corte de las dos curvas para determinar el recinto del área que se debe calcular. Para ello, utilizaremos el comando **Resuelve**.

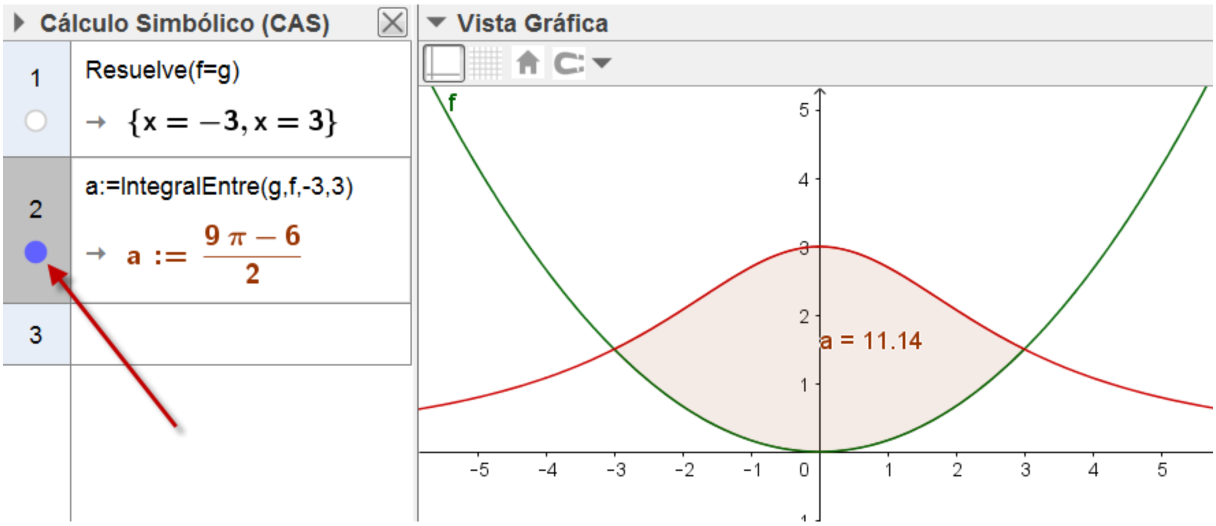



Los puntos de corte corresponden a los valores de abscisas -3 y 3, que serán los límites de la integral definida.

Solo nos queda observar en la gráfica qué función es mayor en el intervalo de integración (-3, 3), para calcular, según el resultado, la integral de la diferencia *f-g* o de *g-f*, aunque podemos omitir este paso, hallando el valor absoluto de la integral.




Para obtener la representación del recinto del cual acabamos de obtener el área, bastará con marcar el círculo que aparece junto al número de línea de la vista CAS.




Con un procedimiento similar al resto de integrales resueltas anteriormente, se determinará la convergencia de integrales impropias.

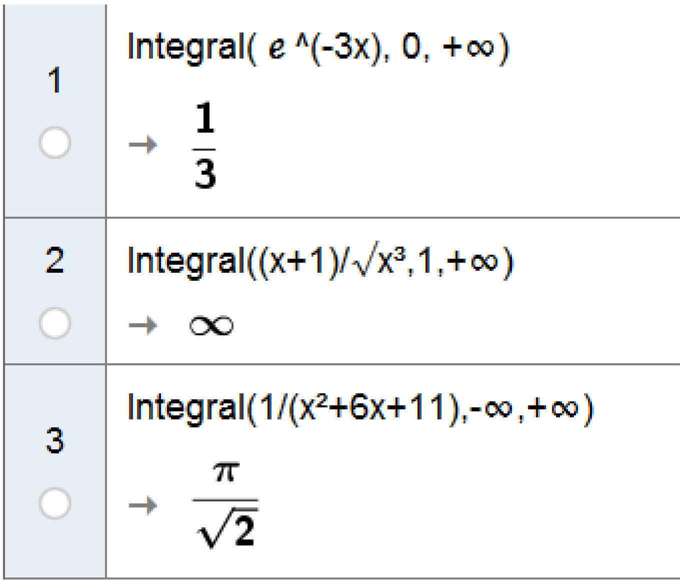
## Ejemplo 16

*Calcular en caso de ser convergentes, las integrales:*

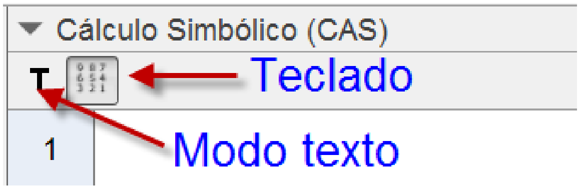
$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+11}dx$$

Para calcular cada una de las integrales bastará con introducir el comando **Integral** para las funciones y límites indicados.

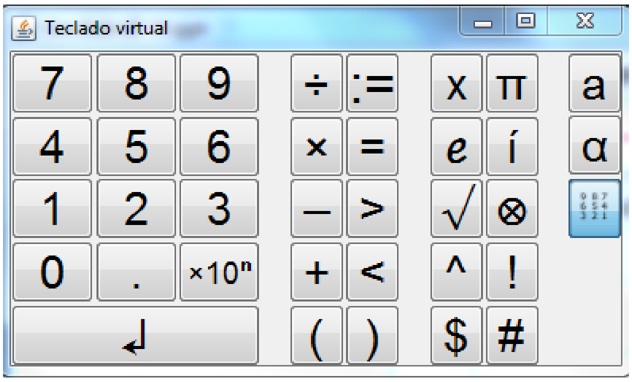
Así, para la primera integral, obtendremos que es convergente y su valor es $\frac{1}{3}$, mientras que la segunda es divergente y la tercera convergente.



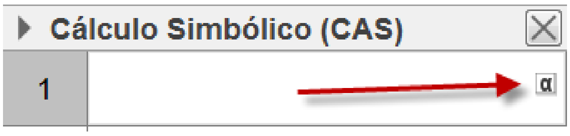
En la vista CAS disponemos de opciones para incluir texto y para abrir un teclado en el que encontraremos el símbolo correspondiente al infinito.




El teclado virtual que aparecerá será el siguiente:




Además, algunos símbolos aparecerán al pulsar sobre la opción que aparece en la derecha de cada línea de entrada.




Aparecerán los símbolos siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | β | γ | δ | ε | ζ | η | θ | κ | λ |
| μ | ξ | ρ | σ | τ | φ | ϕ | χ | ψ | ω |
| Γ | Δ | Θ | Π | Σ | Φ | Ω | ∞ | ⊗ | ≟ |
| ≠ | ≤ | ≥ | ¬ | ∧ | ∨ | → | ∥ | ⊥ | ∈ |
| ⊆ | ⊂ | ⊄ | $^2$ | $^3$ | ° | í | π | e | |
| « | » | € | | | | | | | |

## Cálculo de límites

El límite de una función o de una sucesión se calcula a través del comando **Límite**, cuya sintaxis es:

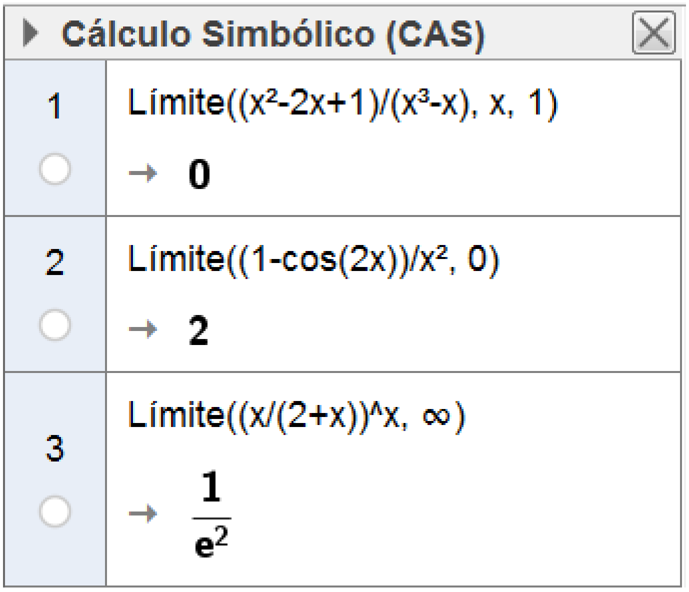
**Límite(función, valor)**

**Límite(función, variable, valor)**

## Ejemplo 17

*Calcular:* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ $\qquad \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{2+x}\right)^x$

Utilizando el comando **Límite** calcularemos los límites anteriores, cuyos resultados aparecen en la imagen siguiente:




Para calcular los límites laterales de una función utilizaremos los comandos **LímiteIzquierda** y **LímiteDerecha**.

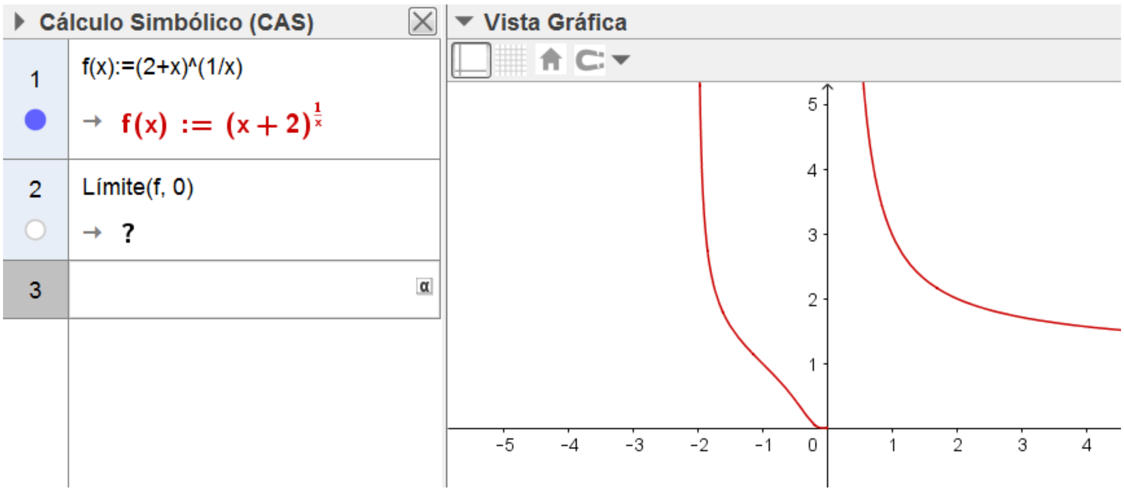
La sintaxis de estos dos comandos es similar a la del comando **Límite**.

## Ejemplo 18

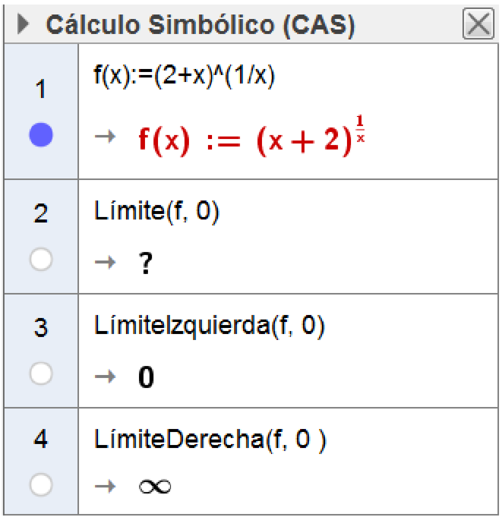
*Hallar los límites laterales de la función f en el punto x = 0, siendo:*

$$f(x) = (2+x)^{\frac{1}{x}}$$

Al definir la función aparecerá en la vista gráfica, por lo que podemos observar que el límite de f en x=0 no existirá, tal y como devuelve el comando **Limite**.




Utilizando los comandos anteriores para obtener los límites laterales.




## Series numéricas

Dada una serie numérica:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots$$

podrá calcularse la suma parcial de orden $k$: $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$

o la suma de un número finito de términos consecutivos: $\sum_{n=k}^{h} a_n = S_h - S_k$

y la suma de los infinitos términos, si la serie es convergente: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Estas operaciones se realizarán a través del comando **Suma**, cuya sintaxis es:

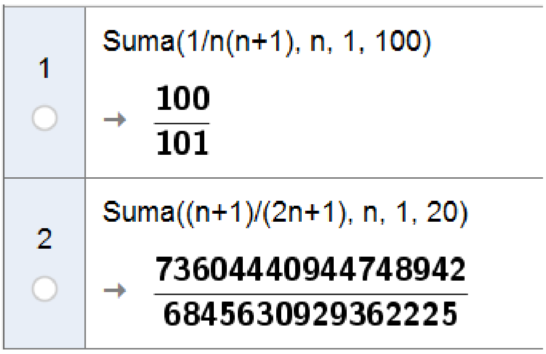
**Suma(expresión, variable, valor_inicial, valor_final)**

## Ejemplo 19

*a. Hallar la suma de los cien primeros términos de la serie* $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

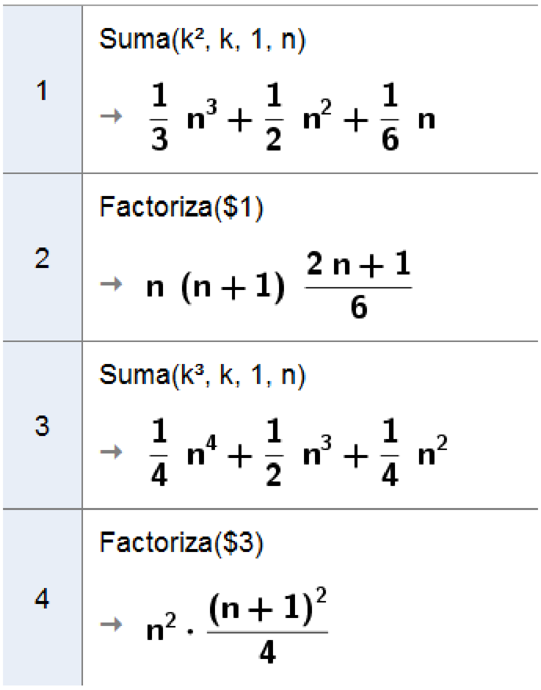
*b. Calcular la suma de los veinte primeros términos de la serie* $b_n = \frac{n+1}{2n+1}$

Para calcular las sumas parciales, ejecutamos la opción **Suma** con las expresiones y valores para los términos que deseamos sumar.




Recordemos que pulsando el botón ≈ obtendremos una aproximación de los resultados obtenidos.

El comando **Suma** permite hallar expresiones ya conocidas, como la suma de los cuadrados o los cubos de los *n* primeros números naturales.



Hemos utilizado el comando **Factoriza** para expresar en la forma conocida las fórmulas obtenidas en las sumas anteriores.

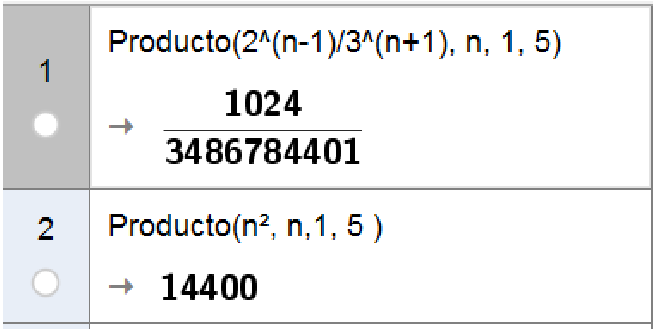
Un proceso similar utilizaremos para obtener el producto de los *n* primeros términos de una sucesión; para ello disponemos del comando **Producto**, cuya sintaxis es similar al comando anterior.

**Ejemplo 20**

*Calcular el producto de los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones:*

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} \qquad\qquad b_n = n^2$$

Para calcular el producto de los cinco primeros términos, bastará con utilizar el comando **Producto**, indicando los valores inicial y final de la serie que se desea sumar.




**Actividades propuestas II**

1. Hallar las derivadas de las funciones:

a. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ b. $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ d. $f(x) = \sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

*2.* Calcular $f^{\,3)}$ y $g^{20)}$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad g(x) = x^2 \operatorname{sen} x$$

3. Calcular la derivada quinta de la función $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{y^4}$, respecto de *y* tres veces y dos respecto de *x*.
4. Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+2}$, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto *x* = *-1*.
5. Dada la función $f(x)=x+\dfrac{k}{x}$, hallar *k* para que *x*=*-1* sea un máximo relativo.
6. Obtener los polinomios de Taylor de la función coseno en *x* = *0*, de diferentes grados.
7. Hallar los polinomios de Taylor de grados 5, 10 y 15 de la función *f* en *x*=*0*. $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$
8. Halla el polinomio de interpolación de los puntos siguientes: A(-2, 1), B(0, 3), C(1, 1) y D(2, 3).

9. Calcular: a. $\int (x\ -1)\cos x\,dx$ b. $\int \dfrac{x^3+1}{x-5}\,dx$

   c. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$ d. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$

10. Calcular:

   a. $\int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ b. $\int x^2 \ln x\,dx$

   c. $\int x^2 \ln x\,dx$ d. $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$

11. Hallar: a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos x}\,dx$ b. $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x^6}\,dx$ c. $\int_0^2 \dfrac{2x-1}{2x+1}\,dx$
12. Hallar el área limitada por las curvas de ecuaciones:

   $y=6x-x^2$ $y=x^2-2x$

13. Determinar el valor de las siguientes integrales impropias:

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+11}\,dx$ b. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$ c. $\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

14. Calcular en caso de ser convergentes, las integrales:

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ b. $\int_{2}^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}\,dx$ c. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

15. Calcular :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1+2\ln senx}$ b. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}$

16. Hallar los límites cuando x tiende a cero por la derecha y por la izquierda de la función:

$$f(x)=\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$$

17. Hallar la suma de los n primeros términos de las series numéricas:

a. $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots$ b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots$

18. Dada la función:

$f(x)=x^2(x-2)^2$

a. Calcular los máximos y mínimos de la función *f* e indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad.

b. Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$