Programa de actualización docente en conocimientos **pedagógicos y disciplinares**

Curso virtual

2024

Conocimientos ***pedagógicos y disciplinares para*** la práctica docente

Nivel de Educación Secundaria – Área de Matemática

Unidad 2:
Conocimientos ***pedagógicos y disciplinares del área de Matemática***

Sesión 2:
Desarrollo de la competencia "***Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre***"

PERÚ Ministerio de Educación | Formación Docente en Servicio

Ponle PUNCHE y ganamos todos PERÚ

BICENTENARIO PERÚ 2024

Morgan Niccolo Quero Gaime
Ministro de Educación del Perú

María Esther Cuadros Espinoza
Viceministra de Gestión Pedagógica

Eloy Alfredo Cantoral Licla
Dirección General de Desarrollo Docente

Ismael Enrique Mañuico Ángeles
Dirección de Formación Docente en Servicio

Nombre del material: Conocimientos pedagógicos y disciplinares para la práctica docente
Nivel de Educación Secundaria – Área de Matemática
Año de publicación: 2024

Ministerio de Educación del Perú
Calle del Comercio 193, San Borja
Lima, Perú. Teléfono 615-5800
www.minedu.gob.pe

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Unidad 2

Conocimientos pedagógicos y disciplinares del área de Matemática

Sesión 2

Desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre”

En esta sesión profundizaremos en la comprensión de aspectos clave de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” como la comprensión de conocimientos sobre población y muestra, gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, probabilidad de un suceso y probabilidad condicional.

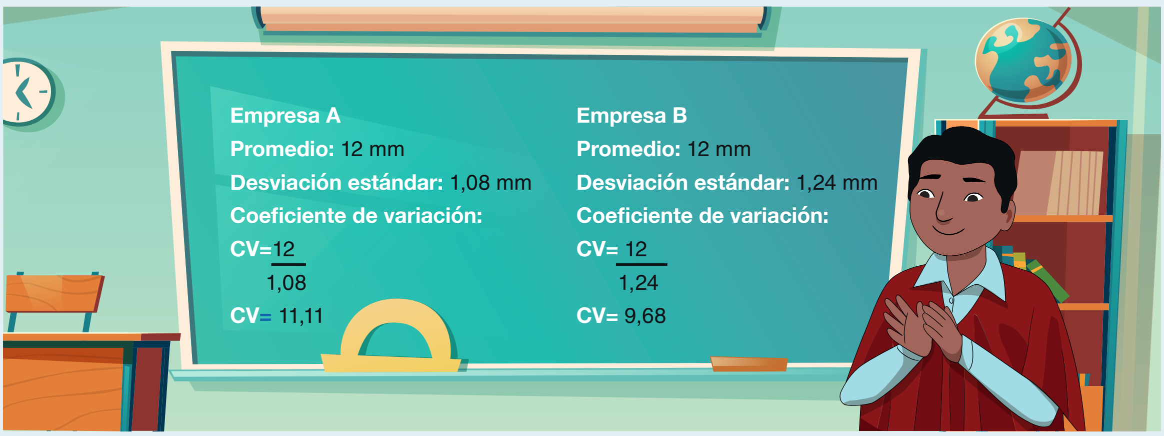
Reflexión de la práctica pedagógica

Partiremos del análisis del siguiente caso:

El docente planteó la siguiente pregunta:

¿Cuál de las dos empresas proveedoras de bolitas de acero tiene menos margen de error respecto al requerimiento de la fábrica de rodajes?

Uno de los estudiantes presentó su resolución:



La empresa B, porque, a menor coeficiente de variación, las medidas de los diámetros son menos dispersas respecto a 12 mm

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

El docente busca retroalimentar al estudiante para que reflexione sobre la resolución que presentó. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la **más** pertinente para conseguir este propósito?

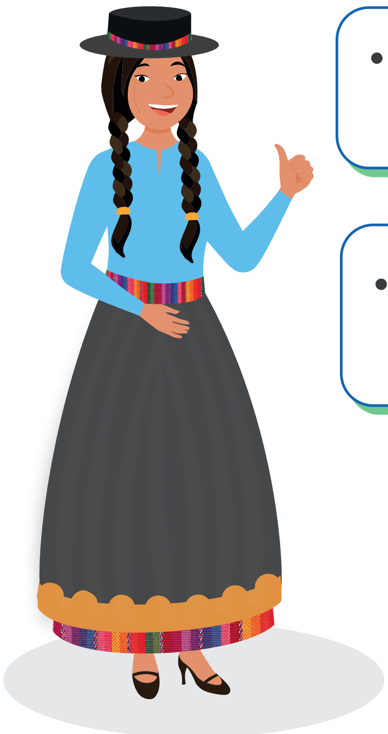
a. Explicarle que el coeficiente de variación es una medida que permite comparar, entre ambas empresas, la dispersión de las medidas de los diámetros con respecto a su promedio. Luego, decirle que, para su comprensión, es mejor expresarlo en porcentajes. Finalmente, solicitarle que verifique si su respuesta es correcta.

b. Preguntarle qué entiende por “tener menos margen de error respecto al requerimiento de la empresa de rodajes” y pedirle que compare los promedios, las desviaciones estándar y los coeficientes de variación de ambas empresas. Finalmente, solicitarle que repase sus operaciones para saber si son correctas.

c. Pedirle que mencione qué entiende por coeficiente de variación. Luego, mediante preguntas, orientarlo a que entienda la relación entre la desviación estándar y el promedio como la relación de una parte respecto del total. Finalmente, solicitarle que revise su procedimiento para saber si es correcto.

Fuente: Minedu (s. f.). Evaluaciones Anteriores.
https://acortar.link/CiXBpY

Reflexionemos:



- ¿Cómo puede interpretar el estudiante los coeficientes de variación respecto a la fabricación de las bolitas de acero de las fábricas A y B?

- ¿De qué manera la situación del caso planteado favorece un aprendizaje significativo de la matemática en situaciones de gestión de datos e incertidumbre?

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Comprensión de conocimientos y saberes

Para resolver este caso y otros que te presentaremos, analizaremos lo siguiente:

- 2.1 Población y muestra
- 2.2 Variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas
- 2.3 Gráficos estadísticos
- 2.4 Medidas de tendencia central para datos agrupados y no agrupados
- 2.5 Medidas de dispersión
- 2.6 Probabilidad de un suceso
- 2.7 Probabilidad condicional

2.1 Población y muestra

- Una población es un conjunto de elementos que pueden brindar información para realizar un estudio.

Por ejemplo, todos los estudiantes de un centro educativo, todas las familias que viven en un distrito determinado, entre otras.

- Una muestra es una parte o un subconjunto de una determinada población. Cada elemento que forma parte de la muestra tiene la misma posibilidad de haber sido elegido.

Por ejemplo, los estudiantes de una sección de primero de secundaria del centro educativo, las familias ubicadas alrededor de un parque que pertenece a un distrito, entre otras.

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

2.2 Variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas

Una variable estadística es una propiedad que pueden presentar los elementos de una muestra o de una población, que tienen la característica de poder medirse y adoptar diferentes valores. Estas variables se pueden diferenciar entre cualitativas y cuantitativas.

a. Variable cualitativa. Son variables que expresan cualidades o características de un elemento. Por lo general no son de carácter numérico, y si lo fueran, realizar operaciones matemáticas con ellas carece de sentido. Dentro de ellas podemos distinguir:

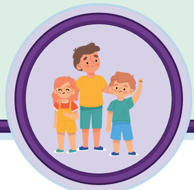
I. Variables cualitativas nominales

Son las variables que no pueden ser sujetas a un criterio de orden, es decir, los valores que toma la variable no pueden ser ordenados de forma ascendente o descendente. Por ejemplo, el color preferido, o la carrera de estudios de su preferencia.

II. Variables cualitativas ordinales

Son las variables que sí pueden ser sujetas a un criterio de orden; es decir, los valores que toma la variable se pueden ordenar de forma ascendente o descendente. Por ejemplo, el nivel de satisfacción de un servicio: muy malo, malo, bueno, muy bueno, excelente.

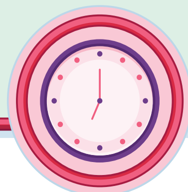
b. Variable cuantitativa. Son variables cuyos valores se presentan con cantidades numéricas. Dentro de ellas podemos distinguir:



I. Variables cuantitativas discretas

Son las variables cuyos valores surgen de realizar un conteo, es decir, se pueden enumerar.

Por ejemplo, número de hijos, número de autos, entre otras.



II. Variables cuantitativas continuas

Son las variables que pueden tomar cualquier valor numérico dentro de un intervalo de valores definido.

Por ejemplo, el peso, el tiempo, etc.

2.3 Gráficos estadísticos

Un gráfico estadístico representa visualmente un conjunto de datos considerados para realizar un estudio. Es una herramienta muy eficaz porque simplifica la información brindada, facilita la comparación de datos, muestra una tendencia de la información recolectada, entre otros factores. Estos gráficos se pueden distinguir según el tipo de variable, o la manera en la que se organiza la información, que puede ser en intervalos o no.

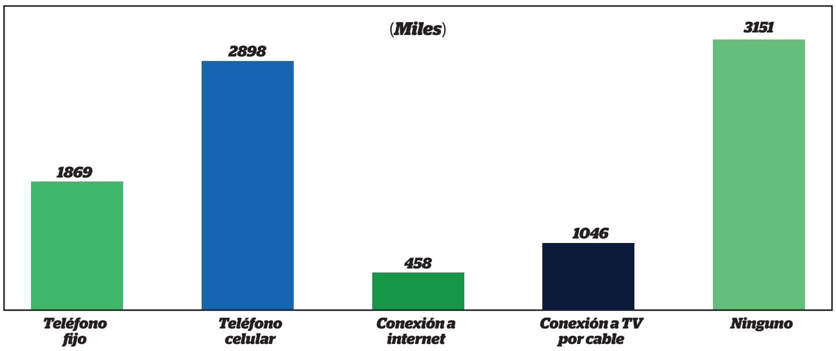
a. Gráficos estadísticos para una variable cualitativa

Entre ellos figuran el gráfico de barras o el gráfico circular.

- *Gráfico de barras*

Es una representación gráfica en forma de barras de igual amplitud de un conjunto de datos, igualmente espaciados.

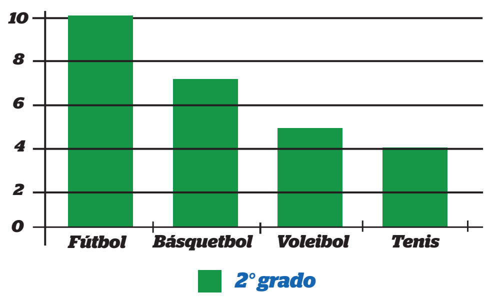
Distribución de hogares en viviendas particulares, según servicio de información y comunicación que dispone en el hogar, 2007

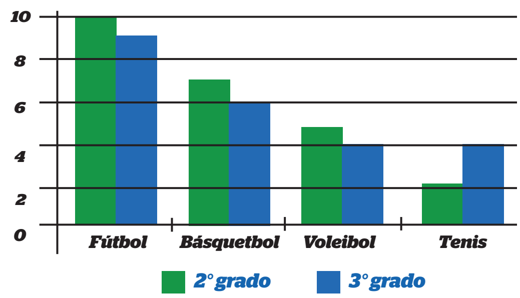


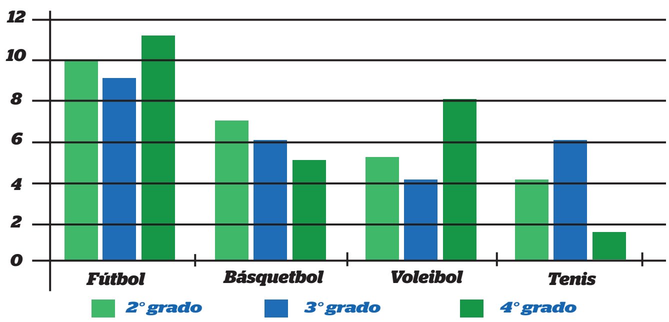
Fuente: INEI – Censos Nacionales 2007: XI de Población y VI de Vivienda.

Puede ser presentadas de forma simple, dobles o múltiples

Gráfico de barras simples, dobles y múltiples

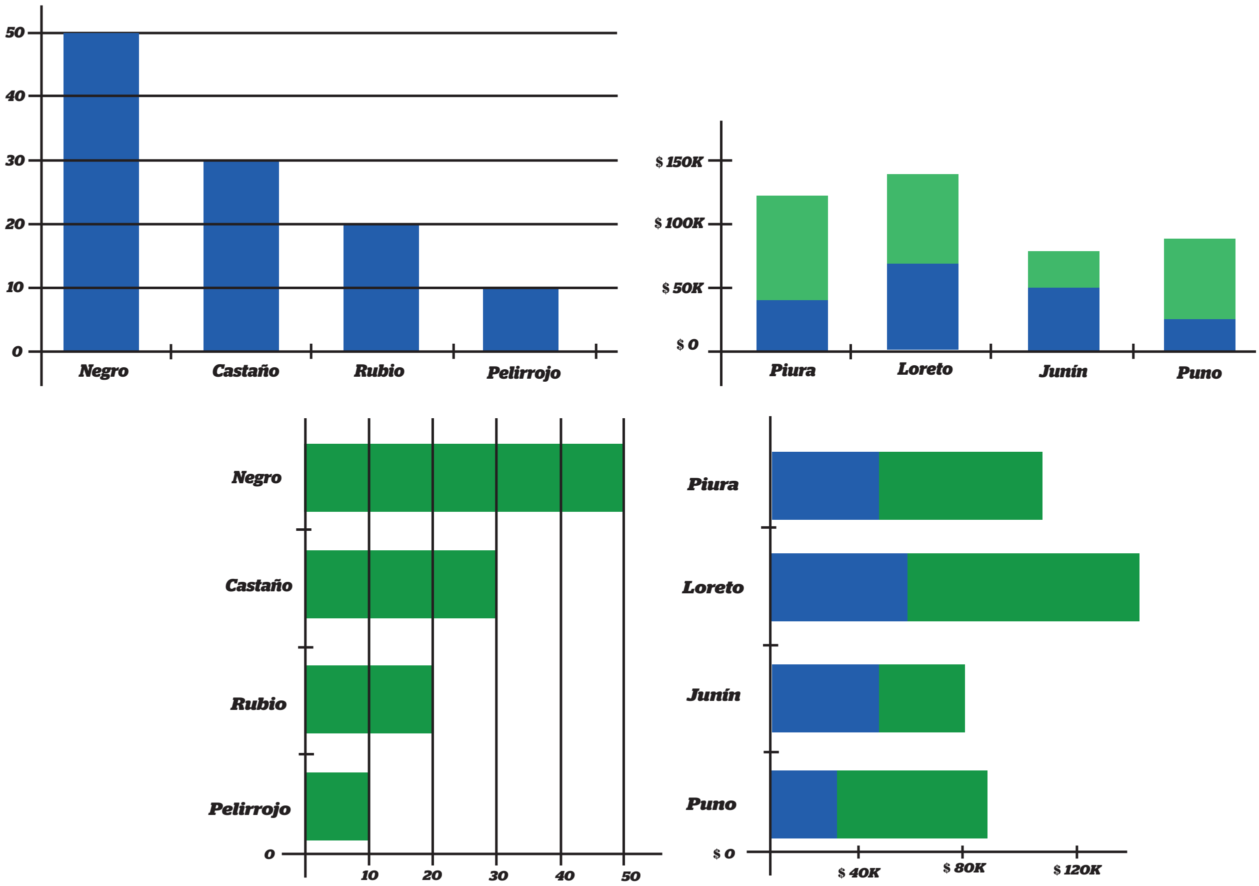






No solo, pueden ser representadas como de barras verticales, sino también como barras horizontales o apiladas.

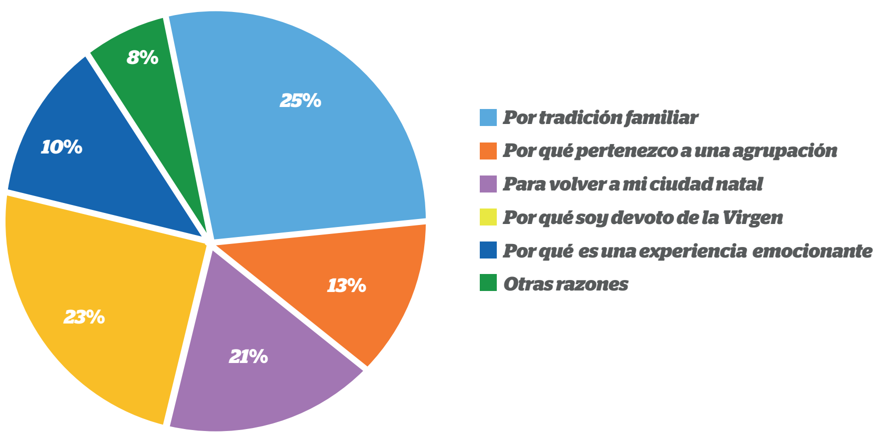
Gráfico de barras verticales, horizontales y apiladas



- ### Gráfico circular

Es una representación gráfica en forma circular de un conjunto de datos, donde cada sector representa el porcentaje de ocurrencia de cada una de las variables del estudio.

Razones para participar en el festival de la Virgen de la Candelaria 2024



Fuente: Elaboración propia

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

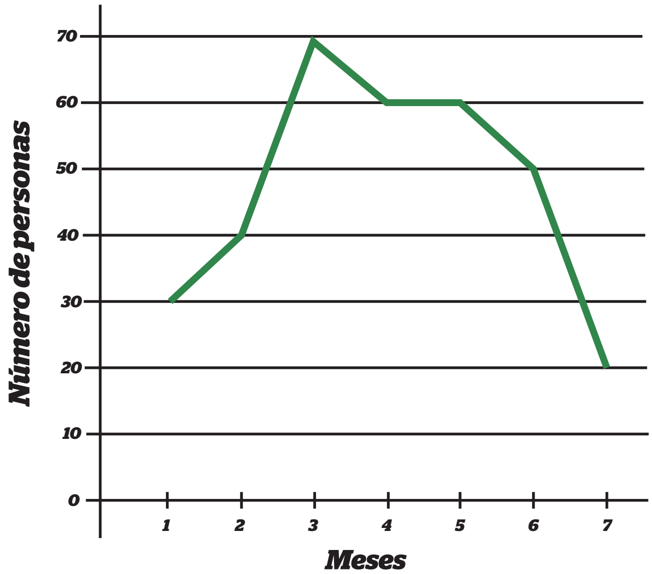
b. Gráficos estadísticos para una variable cuantitativa

Entre los gráficos que se emplean para representar la información obtenida cuando la variable es cuantitativa, figuran el gráfico de línea, el gráfico de bastones, el histograma de frecuencias y el polígono de frecuencias.

- *Gráfico de líneas*

Se utiliza, en particular, para representar información relacionada con la variable tiempo, donde los valores se presentan igualmente espaciados (por ejemplo, en horas, días, meses o años).

Distribución del número de contagiados según los meses transcurridos

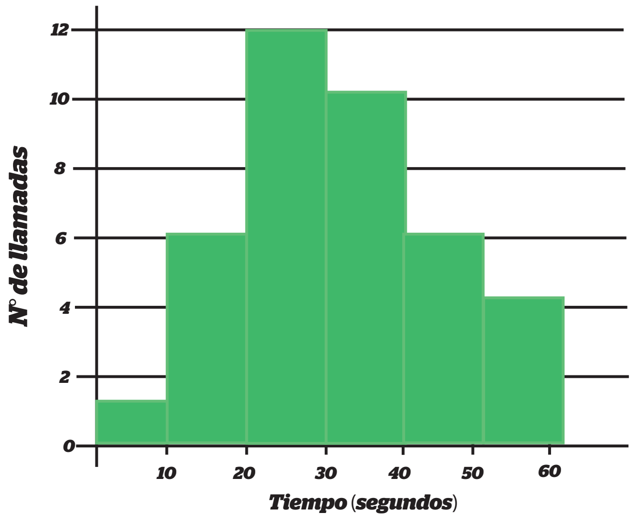


Fuente: Elaboración propia

- *Histograma*

Se utiliza cuando los datos se organizan en intervalos de igual amplitud. Son barras de igual grosor, según la amplitud de los intervalos, y dan la impresión de un gráfico que presenta un conjunto de barras sin espaciamiento entre ellas.

Distribución del número de llamadas a un call center según el tiempo

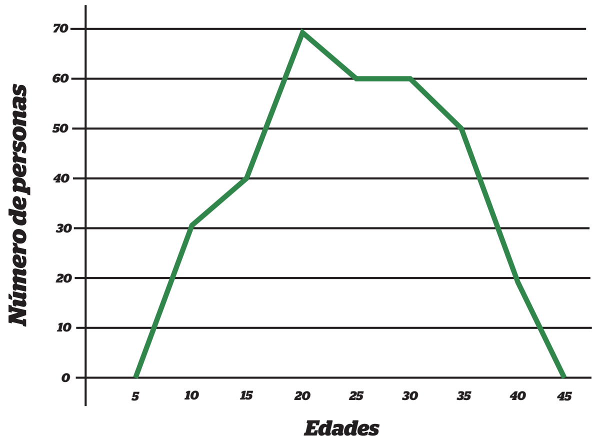


Fuente: https://nuevaescuelamexicana.sep.gob.mx/detalle-ficha/37569/

- *Polígonos de frecuencia*

Es una gráfica que se obtiene uniendo puntos que tienen como coordenadas la marca de clase de un intervalo y la frecuencia absoluta asociada con dicho intervalo. La unión de estos puntos, cuyos puntos inicial y final se ubican sobre el eje horizontal, dan la impresión de un polígono.

Distribución de personas según sus edades

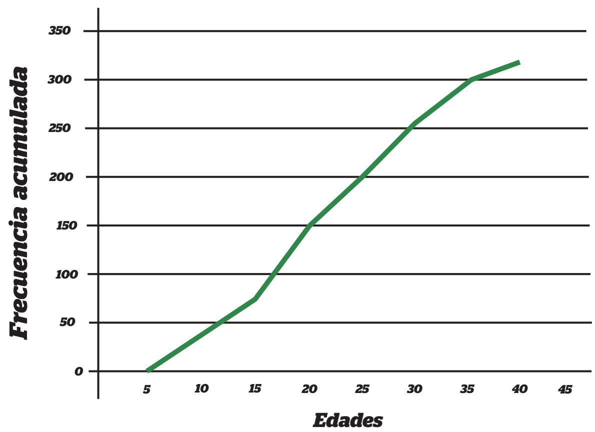


Fuente: Elaboración propia

- *Ojiva*

La ojiva es un gráfico que presenta las frecuencias acumuladas en el eje vertical, mientras en el eje horizontal se colocan las marcas de clase.

Ojiva de frecuencias



Fuente: Elaboración propia

2.4 Medidas de tendencia central para datos agrupados y no agrupados

Son medidas que sirven para describir un conjunto de datos, e informan sobre la posición central en torno a la cual se ubica este conjunto. Entre las medidas de tendencia central figuran la media aritmética, la mediana y la moda.

a. Media aritmética

Es el promedio aritmético de todos los datos numéricos. Para determinar la media se puede utilizar una fórmula que varía dependiendo de si los datos están o no agrupados.

- Media aritmética de datos no agrupados

Sean:

x_i: cada uno de los valores del conjunto de datos

n : cantidad total de datos

La media $\overline{x}$ se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Ejemplo: sean los tiempos en minutos que demoran 5 estudiantes para llegar a la universidad: 10; 30; 25; 60; 40. Para determinar la media, reemplazamos:

$$\overline{x} = \frac{10 + 30 + 25 + 60 + 40}{5} = \frac{165}{5} = 33$$

Esto indica que, en promedio, los estudiantes demoran 33 minutos para llegar a la universidad.

- Media aritmética de datos agrupados sin intervalos

Sean:

x_i: cada uno de los valores del conjunto de datos, donde $i = 1, \ldots, k$

f_i : cada una de las frecuencias absolutas de cada valor de la variable, donde $i = 1, \ldots, k$

n : cantidad total de datos

La media $\overline{x}$ se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n} = \frac{x_1 f_i + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k}{n}$$

Ejemplo: la siguiente tabla muestra la cantidad de dispositivos digitales que 50 estudiantes poseen.

Número de dispositivos digitales	0	1	2	3	4	5
Cantidad de estudiantes	1	10	20	10	5	4

Para deteminar la media de los datos, completamos la información en la siguiente tabla:

x_i	f	$x_i \cdot f$
0	1	0
1	10	10
2	20	40
3	10	30
4	5	20
5	4	20
TOTAL	50	120

Luego, $\overline{x} = \frac{120}{50} = 2,4$. Esto quiere decir que, en promedio, los estudiantes poseen 2,4 dispositivos digitales.

- ***Media aritmética de datos agrupados con intervalo***

Sean:

x'_i : cada una de las marcas de clase del i-ésimo intervalo, donde $i = 1, \ldots, k$

f_i: cada una de las frecuencias absolutas de cada valor de la variable, donde $i = 1, \ldots, k$

n : cantidad total de datos

La media $\overline{x}$ se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x'_i f_i}{n} = \frac{x'_1 f_i + x'_2 f_2 + \ldots + x'_k f_k}{n}$$

Ejemplo: se ha tomado la altura en centímetros a 20 estudiantes y la información recolectada se agrupó en 5 intervalos de igual amplitud, tal y como se observa en la tabla:

Intervalos de pesos	x'_i	f_i	$x'_i \cdot f_i$
[140 ; 150 [	145	1	145
[150 ; 160 [	155	2	310
[160 ; 170 [	165	10	1650
[170 ; 180 [	175	4	700
[180 ; 190]	185	3	555
	TOTAL	n=20	$\sum x'_i \cdot f_i = 3360$

Luego, $\overline{x} = \frac{3360}{20} = 1\ 68$. Esto quiere decir que, en promedio, los estudiantes miden 168 cm de altura.

b. Mediana

La mediana es una medida de tendencia central que divide el total de datos en dos partes iguales, es decir, un 50% de los datos son menores o iguales a la mediana, y un 50% de los datos son mayores o iguales a ella. Para determinar su valor, los datos deben estar ordenados, sea de forma ascendente o descendente.

- *Mediana de datos no agrupados*

La forma de determinar la mediana de los datos varía según si la cantidad de datos es un número par o impar.

- Si **n es impar,** entonces el valor de la mediana se encuentra en la posición $\frac{n+1}{2}$.

Ejemplo: sean las edades de 7 niños: 3, 4; 4; **5**; 6; 7; 8.

Se observa que la cantidad de datos es un número impar; por lo tanto, la mediana se ubica en la posición $\frac{7+1}{2} = 4°$ Como los datos están ordenados de forma ascendente, la mediana Me es igual a 5 años. Se puede decir que el 50 % de los niños tiene 5 años como máximo, o que el 50 % de los niños tiene 5 años como mínimo.

- Si **n es par,** entonces se deben determinar los valores que se ubican en las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$. La mediana será igual al promedio aritmético de ambos.

Ejemplo: sean los pesos en kilos de 8 niños: 30, 32; 35; **40; 42**; 45; 50; 50

Se observa que la cantidad de datos es un número par. Determinamos los valores ubicados en la posición $\frac{8}{2} = 4°$ y $\frac{8}{2}+1 = 5°$, que son 40 y 42 kilos respectivamente. Como los datos están ordenados de forma ascendente, la mediana Me es igual a $\frac{40+42}{2} = 41$. Se puede decir que el 50 % de los niños pesa menos de 41 kilos, o que el 50 % de los niños pesa más de 41 kilos (escribimos menos que … o más que… porque la mediana no es uno de los pesos de los 8 niños).

- *Mediana de datos agrupados con intervalos*

Cuando los datos están organizados en intervalos, se debe identificar el intervalo donde se ubica la mediana, que se denomina “intervalo de clase mediana”, acumulando el 50% de los datos. Luego, se utiliza la siguiente fórmula:

$$Me = L_{inf} + C\left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i}\right)$$

Donde:

L_{inf}: límite inferior de clase mediana

C : amplitud del intervalo de clase mediana

F_{i-1}: frecuencia absoluta acumulada anterior a la clase mediana

f_i : frecuencia absoluta de la clase mediana

Ejemplo: se ha tomado la altura en centímetros a 20 estudiantes y la información recolectada se agrupó en 5 intervalos de igual amplitud, tal y como se observa en la tabla:

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Intervalos de pesos	x'_i	f_i	F_i
[140 ; 150 [	145	1	1
[150 ; 160 [	155	2	3
[160 ; 170 [	165	11	14
[170 ; 180 [	175	4	18
[180 ; 190]	185	2	20
	TOTAL	n=20	

Para determinar la mediana debemos acumular la frecuencia absoluta hasta llegar a un 50 % de datos, es decir, $\frac{20}{2}=10$ datos. Según la tabla, la mediana se ubicaría en el tercer intervalo, porque la frecuencia acumulada absoluta hasta dicho intervalo es 14. Antes de utilizar la fórmula, determinamos los siguientes valores: $L_{inf}=160$; $C=10$; $F_{i-1}=F_2=3$; y $f_i=f_3=11$. Por último, la mediana es igual a:

$$Me = 160 + 10\left(\frac{10-3}{11}\right) = 166{,}4$$

Se puede decir que el 50 % de los estudiantes mide menos de 166,4 centímetros de estatura, o que el 50 % de los estudiantes mide más de 166,4 centímetros de estatura.

c. Moda

Es el valor que más se repite o que presenta la mayor frecuencia en una muestra estadística o población.

- *Moda de datos no agrupados*

Considerando el total de los datos, la moda corresponderá al dato que se repite la mayor cantidad de veces.

Ejemplo: se tienen las notas de 13 estudiantes de un curso de Historia de cierto colegio:

10; 10; 11; 12; 13; **15; 15; 15; 15;** 16; 18; 18; 20

Observamos que el valor que más se repite es 15. Por tanto, la moda es 15, que significa que la nota que más se repite es 15 puntos.

- *Moda de datos agrupados con intervalos*

Para determinar la moda de los datos cuando estos se agrupan en intervalos, se debe identificar el intervalo con mayor frecuencia (clase modal) y, luego, utilizar la expresión:

$$Mo = L_{inf} + C\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Donde:

$$d_1 = f_i - f_{i-1}$$
$$d_2 = f_i - f_{i+1}$$

L_{inf} : límite inferior de clase modal

C : amplitud o ancho de la clase modal

f_i : frecuencia absoluta de la clase modal

f_{i-1} : frecuencia absoluta anterior a la clase modal

f_{i+1} : frecuencia absoluta siguiente a la clase modal

Ejemplo: se ha tomado la altura en centímetros a 20 estudiantes y la información recolectada se agrupó en 5 intervalos de igual amplitud, tal y como se observa en la tabla:

Intervalos de pesos	x'_i	f_i
[140 ; 150 [	145	1
[150 ; 160 [	155	2
[160 ; 170 [	165	11
[170 ; 180 [	175	4
[180 ; 190]	185	2
	TOTAL	n=20

Se observa en la tabla que el intervalo que presenta la mayor frecuencia absoluta (clase modal) es [160; 170 [. A partir de esta información, determinamos los valores de los diferentes elementos que forman parte de la fórmula: $L_{inf}=160$; la amplitud C= 10; la frecuencia absoluta de la clase modal es $11(f_3=11)$, la frecuencia absoluta anterior a la clase modal es $2\ (f_2=2)$ y la frecuencia absoluta siguiente a la clase modal es $4(f_4=4)$; d_1=11-2=9 y d_2=11-4=7. Por lo tanto, la moda es igual a:

$$Mo=160+10\left(\frac{9}{9+7}\right)= 165{,}6$$

2.5 Medidas de dispersión

Son medidas que sirven para describir la variabilidad de un conjunto de datos, y para comparar cuán homogéneos o dispersos son los datos entre dos o más conjuntos. Entre las medidas de dispersión figuran la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación.

2.5.1 La varianza

Es el promedio aritmético de las desviaciones estándar respecto de su media elevadas al cuadrado; por lo tanto, esta expresada en las unidades al cuadrado de la variable inicial.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ejemplo: sean las edades de 5 niños: 7; 8; 10; 12; 13.

Según la fórmula, debemos determinar la media de los datos:

$$\overline{x} = \frac{7+8+10+12+13}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

Para el cálculo de la varianza

$$S^2 = \frac{\sum_{1}^{5} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{(7-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(13-10)^2}{5-1} = \frac{26}{4} = 6{,}5 \text{ años}^2$$

a) Desviación estándar

La desviación estándar (s) es una medida de dispersión, y se le considera como un promedio de las desviaciones individuales de cada dato del conjunto con respecto a la media de una distribución. Es igual a la raíz cuadrada de la varianza, por lo que tiene las mismas unidades que la media:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Ejemplo: sean las edades de 5 niños: 7; 8; 10; 12; 13. Del ejemplo anterior se sabe que la media es igual a 10 y que la varianza es igual a 6,5 años^2. Entonces, $s = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$ años.

b) Coeficiente de variación

El coeficiente de variación (CV) es una medida de dispersión que permite comparar cuán homogéneos o dispersos se presentan los datos en dos o más conjuntos de datos diferentes. La manera de utilizar el CV es como sigue: a mayor coeficiente de variación, mayor dispersión de los datos, que es lo mismo decir que son menos homogéneos; o a menor CV, los datos son menos dispersos, lo que equivale a decir que son más homogéneos.

El CV se considera también como una medida de la variabilidad relativa, porque se expresa como la razón entre la desviación estándar (s) y la media ($\underline{x}$), tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$CV = \frac{s}{\overline{x}}$$

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Ejemplo: se conoce la siguiente información sobre las notas de dos horarios diferentes del curso de Matemáticas:

Horario 1: $\overline{x}$ =14 y s=2

Horario 2: $\overline{x}$ =16 y s=3

Para saber qué horario presenta las notas menos dispersas o más homogéneas:

$$CV_{H1} = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2}{14} = 0,14$$
$$CV_{H2} = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{3}{16} = 0,19$$

Por tanto, las notas en el horario 1 fueron menos dispersas o más homogéneas que las notas del horario 2, porque el coeficiente de variación de las notas del horario 1 fue menor que en el horario 2.

2.6 Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso es un valor comprendido entre 0 y 1, que indica cuán posible es que ocurra. Una probabilidad igual a 0 significa que el suceso no tiene posibilidad de ocurrir, y una probabilidad igual a 1 indica que es un suceso seguro. Si se conocen los elementos del espacio muestral de un suceso aleatorio, la probabilidad de ocurrencia se puede obtener como el cociente entre los casos favorables entre el total de caso:

$$Probabilidad = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ totales}$$

Ejemplo: se lanza el dado una sola vez y se desea determinar la probabilidad de que el número que salga sea por lo menos 2. Se tienen 5 casos posibles o favorables {2; 3; 4; 5; 6) de un total de 6 casos totales (todos los números del dado). Por lo que obtendremos la siguiente probabilidad:

$$P(número\ mayor\ o\ igual\ que\ 2) = \frac{5}{6}$$

2.7 Probabilidad condicional

La probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra un evento dado que otro evento ya ocurrió. Si consideramos que sucede un evento A, la probabilidad de que suceda un evento B, dado que ya sucedió el evento A, es igual a la probabilidad de que ocurran al mismo tiempo A y B, entre la probabilidad de que ocurra el evento A:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo: en un aula hay 20 estudiantes: 12 son mujeres y 8 son hombres. Además, 10 estudiantes usan lentes, de los cuales 4 son mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante use lentes dado que es varón?

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Sabemos que la probabilidad de que un estudiante sea varón es 8/20, y la probabilidad de que use lentes y sea varón es 6/20; entonces:

$$P\left(\frac{\text{use lentes}}{\text{varón}}\right) = \frac{P(\text{use lentes y sea varón})}{P(\text{sea varón})} = \left(\frac{6}{20}\right) \div \left(\frac{8}{20}\right) = \frac{3}{4}.$$

Ideas fuerza

- La muestra es una parte de un conjunto de elementos llamado población.
- Las medidas de tendencia central son la media aritmética, mediana y moda.
- La media aritmética es afectada por valores extremos. Sin embargo, la mediana no es afectada por dichos valores.
- La varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación son medidas de dispersión.
- La probabilidad se refiere a la evaluación matemática de las posibilidades de que un evento ocurra o no, teniendo en cuenta la intervención del azar en dicho evento.

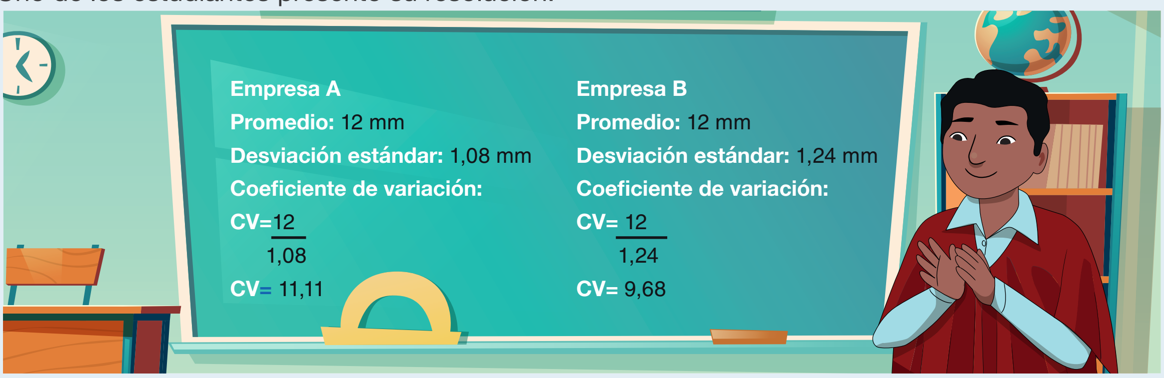
Aplicación en la práctica

Ahora revisemos nuevamente el caso inicial de este fascículo para analizarlo y reflexionar sobre el mismo:

El docente planteó la siguiente pregunta:

¿Cuál de las dos empresas proveedoras de bolitas de acero tiene menos margen de error respecto al requerimiento de la fábrica de rodajes?

Uno de los estudiantes presentó su resolución:



La empresa B, porque, a menor coeficiente de variación, las medidas de los diámetros son menos dispersas respecto a 12 mm

El docente busca retroalimentar al estudiante para que reflexione sobre la resolución que presentó. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la **más** pertinente para conseguir este propósito?

a. Explicarle que el coeficiente de variación es una medida que permite comparar, entre ambas empresas, la dispersión de las medidas de los diámetros con respecto a su promedio. Luego, decirle que, para su comprensión, es mejor expresarlo en porcentajes. Finalmente, solicitarle que verifique si su respuesta es correcta.

b. Preguntarle qué entiende por "tener menos margen de error respecto al requerimiento de la empresa de rodajes" y pedirle que compare los promedios, las desviaciones estándar y los coeficientes de variación de ambas empresas. Finalmente, solicitarle que repase sus operaciones para saber si son correctas.

c. Pedirle que mencione qué entiende por coeficiente de variación. Luego, mediante preguntas, orientarlo a que entienda la relación entre la desviación estándar y el promedio como la relación de una parte respecto del total. Finalmente, solicitarle que revise su procedimiento para saber si es correcto.

Fuente: Minedu (s. f.). Evaluaciones Anteriores.
https://acortar.link/CiXBpY

Ahora vamos a analizar el caso y sus alternativas para poder identificar la respuesta correspondiente.

- **En relación con el caso presentado:**

El docente planteó la siguiente pregunta:

¿Cuál de las dos empresas proveedoras de bolitas de acero tiene menos margen de error respecto al requerimiento de la fábrica de rodajes?

Uno de los estudiantes presentó su resolución:

Empresa A	**Empresa B**
Promedio: 12 mm	**Promedio:** 12 mm
Desviación estándar: 1,08 mm	**Desviación estándar:** 1,24 mm
Coeficiente de variación:	**Coeficiente de variación:**
CV= $\frac{12}{1{,}08}$	**CV=** $\frac{12}{1{,}24}$
CV= 11,11	**CV=** 9,68

La empresa B, porque, a menor coeficiente de variación, las medidas de los diámetros son menos dispersas respecto a 12 mm

El caso presentado hace referencia al proceso de retroalimentación que un docente hace a un estudiante para que reflexione respecto a la resolución de una situación estadística referida al uso del coeficiente de variación para comparar los márgenes de error en la producción de bolitas de acero que dos empresas distintas fabrican.

En un contexto real, el caso dado implica que los estudiantes establezcan una relación entre sus conocimientos sobre situaciones estadísticas y los márgenes de error que las empresas utilizan al fabricar sus productos. Esto se logra al relacionar la fabricación de productos con la descripción de la variabilidad de los diámetros de las bolitas que fabrican. El objetivo es vincular situaciones cotidianas que los estudiantes experimentan al comparar productos que utilizan como recursos para su aprendizaje. Para lograr esto, el docente actúa como mediador, ayudando a construir la idea de coeficiente de variación como parte de la medida de dispersión, para que los estudiantes puedan justificar su proceso de resolución de la situación planteada.

- **En relación con la pregunta o instrucción:**

El docente busca retroalimentar al estudiante para que reflexione sobre la resolución que presentó. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la más pertinente para conseguir este propósito?

La pregunta se enfoca en encontrar la acción pedagógica más adecuada para lograr el objetivo establecido, resolver la situación planteada y reflexionar sobre la respuesta para llevar al estudiante a descubrir su error y volver a utilizar los procedimientos de desviación estándar y coeficiente de variación. El objetivo es que puedan comparar y confirmar cuál de las empresas tiene un margen de error menor o mayor en la fabricación de sus productos.

- **¿Qué conocimientos debemos aplicar para responder la pregunta?**

Es esencial tener un buen entendimiento sobre cómo se comportan los datos, y esto se logra a través de la interpretación de medidas de dispersión como la desviación estándar y el coeficiente de variación. Esto es especialmente importante en situaciones que son cercanas y relevantes para los estudiantes.

- **Retroalimentación de cada una de las alternativas:**

Alternativas	Retroalimentación
a. Explicarle que el coeficiente de variación es una medida que permite comparar, entre ambas empresas, la dispersión de las medidas de los diámetros con respecto a su promedio. Luego, decirle que, para su comprensión, es mejor expresarlo en porcentajes. Finalmente, solicitarle que verifique si su respuesta es correcta.	**Vuelve a intentarlo.** En esta acción, el docente indica al estudiante cómo determinar el coeficiente de variación, no lo guía con preguntas orientadas para que se dé cuenta de su error. Solo se centra en brindarle una retroalimentación elemental al decirle cuál es el propósito del coeficiente de variación, que lo vuelva hacer y lo exprese en porcentaje.
b. Preguntarle qué entiende por “tener menos margen de error respecto al requerimiento de la empresa de rodajes”, y pedirle que compare los promedios, la desviación estándar y los coeficientes de variación de ambas empresas. Finalmente, solicitarle que repase sus operaciones para saber si son correctas.	**Vuelve a intentarlo.** En esta acción, el docente hace preguntas que buscan guiar al estudiante a que se dé cuenta de su error. Sin embargo, sus preguntas desvían la atención del procedimiento seguido, como cuando se pide al estudiante explicar el significado de “margen de error”. Del mismo modo, pedir al estudiante que compare los promedios y las desviaciones no brinda información relevante para que se dé cuenta de su error.

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Alternativas	Retroalimentación
c. Pedirle que mencione qué entiende por coeficiente de variación. Luego, mediante preguntas, orientarlo a que entienda la relación entre las desviaciones estándar y el promedio como la relación de una parte respecto del total. Finalmente, solicitarle que revise su procedimiento para saber si es correcto.	**Bien. Es la alternativa correcta.** En esta acción, el docente se enfoca directamente en el error al pedirle al estudiante que explique su comprensión del coeficiente de variación, basándose en sus conocimientos previos. Por otro lado, es una buena opción relacionar el concepto de coeficiente de variación con la noción de razón, de manera que el estudiante pueda utilizar sus conocimientos previos para deducir la relación entre la desviación estándar y el promedio de cada producto, y así poder identificar su error.

¡Ahora te toca a ti!

Es momento de poner en práctica lo aprendido. Toma en cuenta los conocimientos compartidos y resuelve los siguientes casos de la práctica docente:

Caso 1

Lee atentamente el siguiente caso:

Con el propósito de que afiancen su comprensión sobre las medidas de dispersión, el docente propone a los estudiantes diversas tareas.

¿Cuál de las siguientes tiene mayor demanda cognitiva?

a. Expresar el valor que tendría la desviación estándar de las medidas de los diámetros de un conjunto de bolitas de acero, cuyo promedio es 12 mm y el coeficiente de variación es 0,12.

b. Proponer un valor para el promedio y otro para la desviación estándar, de tal modo que las medidas de los diámetros de las bolitas de acero tengan menor margen de error respecto al requerimiento de la fábrica de rodajes, en comparación con las suministradas por las empresas A y B.

c. Calcular el coeficiente de variación en relación con las medidas de los diámetros de las bolitas de acero de una empresa C, que también es proveedora de la fábrica de rodajes, asumiendo que el promedio de las medidas de los diámetros de estas bolitas es de 12 mm y su desviación estándar es la décima parte del promedio.

Fuente: Minedu (s. f.). Evaluaciones Anteriores.
https://acortar.link/CiXBpY

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

Ahora vamos a analizar el caso y sus alternativas para poder identificar la respuesta correspondiente.

- **En relación con el caso presentado:**

> Con el propósito de que afiancen su comprensión sobre las medidas de dispersión, el docente propone a los estudiantes diversas tareas.

El caso presentado implica aplicar conceptos estadísticos relacionados con medidas de tendencia central, como la media, y medidas de dispersión, como la desviación estándar y el coeficiente de variación. Se proponen tareas que requieren que los estudiantes utilicen estos conocimientos para resolverlas. Sin embargo, estas tareas deben tener ciertas características para que su resolución implique procesos cognitivos relacionados con la comprensión, solución de problemas y pensamiento complejo, en lugar de limitarse a la reproducción de fórmulas, conceptos o procedimientos memorizados. En resumen, estas tareas deben demandar un esfuerzo mental significativo para lograr el objetivo de comprender las medidas de dispersión.

- **En relación con la pregunta o instrucción:**

> ¿Cuál de las siguientes tiene **mayor** demanda cognitiva?

La pregunta propuesta para el caso planteado busca saber cuál de las tareas sugeridas tiene mayor demanda cognitiva. Con ese fin, el docente debe tener en cuenta que la tarea que proponga al estudiante requiera de gran esfuerzo mental en la solución de la situación, tanto en su comprensión como en su resolución, empleando procedimientos para determinar y relacionar la desviación estándar y el coeficiente de variación.

- **¿Qué conocimientos debemos aplicar para responder la pregunta?**

Para el caso debemos aplicar conocimientos relacionados con el comportamiento de datos usando medidas estadísticas de dispersión, la desviación estándar, coeficiente de variación y como estas se relacionan, así mismo para poder identificar la tarea con mayor demanda cognitiva que propone el docente, debemos tener en cuenta las características que establecen la diferencia entre baja y alta demanda cognitiva, así como la relación que hay entre la actividad mental y el conflicto cognitivo enmarcados en el aprendizaje significativo.

- **Marca la alternativa que consideres adecuada:**

Alternativas
a. Expresar el valor que tendría la desviación estándar de las medidas de los diámetros de un conjunto de bolitas de acero, cuyo promedio de estas medidas es 12 mm y el coeficiente de variación es 0,12.

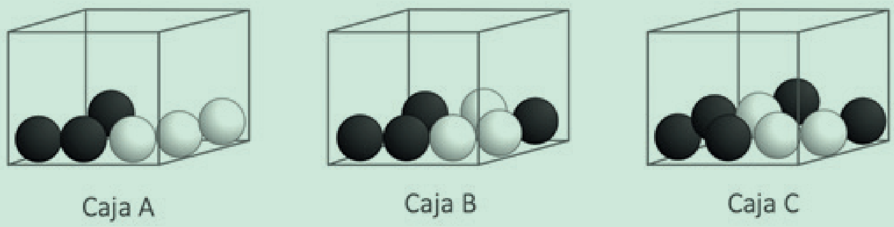
Alternativas
b. Proponer un valor para el promedio y otro para la desviación estándar, de tal modo que las medidas de los diámetros de las bolitas de acero tengan menor margen de error respecto al requerimiento de la fábrica de rodajes, en comparación con las suministradas por las empresas A y B.
c. Calcular el coeficiente de variación en relación con las medidas de los diámetros de las bolitas de acero de una empresa C, que también es proveedora de la fábrica de rodajes, asumiendo que el promedio de las medidas de los diámetros de estas bolitas es de 12 mm y su desviación estándar es la décima parte del promedio.

Caso 2

Lee atentamente el siguiente caso:

Un docente tiene como propósito que los estudiantes calculen y comparen la probabilidad de diferentes sucesos. Para ello, plantea la siguiente tarea:

Tres cajas contienen bolas negras y blancas. Si se extrae al azar una bola de cada caja, ¿en qué caso hay mayor probabilidad de obtener una bola blanca al primer intento?



Felipe, un estudiante, respondió: “En los tres casos hay igual probabilidad porque en todas las cajas hay exactamente 3 bolas blancas”.

¿Cuál de las siguientes acciones es más pertinente para brindar una adecuada retroalimentación al estudiante, de modo que reflexione sobre su concepción errónea?

a. Explicarle que la probabilidad se puede representar como una fracción en la que el numerador expresa la cantidad de casos a favor; y el denominador, la cantidad total de posibles resultados de un experimento. Luego, pedirle que calcule la probabilidad asociada a cada una de las tres cajas y que determine cuál de las tres fracciones es la mayor.

b. Pedirle que cuente las bolas blancas, las bolas negras y la cantidad total de bolas en cada caja. Luego, preguntarle: "En las cajas, ¿hay la misma cantidad de bolas blancas?, ¿hay la misma cantidad total de bolas?, ¿será lo mismo tener 3 opciones de 6, que 3 de 7 o tener 3 de 8? ¿Esto afectará el valor de la probabilidad en cada caso?, ¿por qué?".

c. Preguntarle lo siguiente: "¿Cómo se calcula la probabilidad en un experimento?, ¿de cuántas formas diferentes se puede representar una probabilidad?, ¿conviene usar la representación porcentual para realizar las comparaciones?, ¿por qué?".

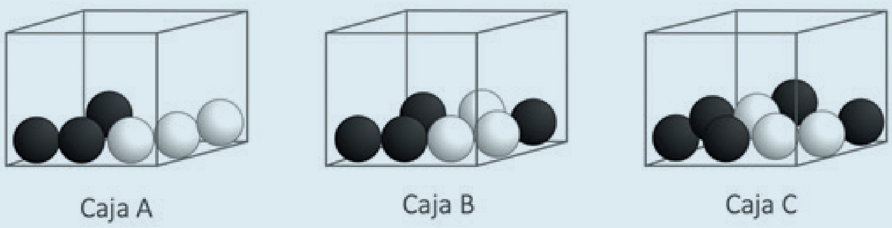
Fuente: Minedu (s. f.). Evaluaciones Anteriores.
https://acortar.link/CiXBpY

Ahora vamos a analizar el caso y sus alternativas para poder identificar la respuesta correspondiente.

- **En relación con el caso presentado:**

Un docente tiene como propósito que los estudiantes calculen y comparen la probabilidad de diferentes sucesos. Para ello, plantea la siguiente tarea:

Tres cajas contienen bolas negras y blancas. Si se extrae al azar una bola de cada caja, ¿en qué caso hay mayor probabilidad de obtener una bola blanca al primer intento?



Felipe, un estudiante, respondió: "En los tres casos hay igual probabilidad porque en todas las cajas hay exactamente 3 bolas blancas".

La situación ocurre en el aula de clase, donde el docente busca reforzar la comprensión de sus estudiantes sobre el cálculo de probabilidades, que se define como el cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos posibles. La respuesta del estudiante requiere que el docente replantee la situación para que el estudiante reflexione sobre su respuesta. Sin decirle directamente qué hacer, el docente le proporciona retroalimentación a través de preguntas reflexivas, que ayudan al estudiante a identificar su error y a reflexionar sobre su proceso de aprendizaje, relacionándolo con sus conocimientos y contexto.

MINEDU - Dirección de Formación Docente en Servicio, 2024

- **En relación con la pregunta o instrucción:**

> ¿Cuál de las siguientes acciones es más pertinente para brindar una adecuada retroalimentación al estudiante, de modo que reflexione sobre su concepción errónea?

La pregunta busca encontrar una forma adecuada de proporcionar retroalimentación al estudiante para que reflexione sobre su respuesta. El objetivo es guiar al estudiante hacia la forma correcta de determinar una probabilidad. Para lograr esto, el docente debe evaluar cuál de las acciones generará en el estudiante la necesidad de descubrir la relación entre los sucesos favorables y el total de sucesos a través de su experimentación.

- **¿Qué conocimientos debemos aplicar para responder la pregunta?**

Debemos aplicar conocimientos sobre probabilidad de sucesos aplicados a diversas situaciones del contexto real de los estudiantes, complementando con nuestros saberes sobre retroalimentación en el aula, las características del aprendizaje significativo en matemática y conflicto cognitivo.

- **Marca la alternativa que consideres adecuada:**

Alternativas
a. Explicarle que la probabilidad se puede representar como una fracción en la que el numerador expresa la cantidad de casos a favor y el denominador, la cantidad total de posibles resultados de un experimento. Luego, pedirle que calcule la probabilidad asociada a cada una de las tres cajas y que determine cuál de las tres fracciones es la mayor.
b. Pedirle que cuente las bolas blancas, las bolas negras y la cantidad total de bolas en cada caja. Luego, preguntarle: “En las cajas, ¿hay la misma cantidad de bolas blancas?, ¿hay la misma cantidad total de bolas?, ¿será lo mismo tener 3 opciones de 6, que 3 de 7 o tener 3 de 8? ¿Esto afectará el valor de la probabilidad en cada caso?, ¿por qué?”.
c. Preguntarle lo siguiente: “¿Cómo se calcula la probabilidad en un experimento?, ¿de cuántas formas diferentes se puede representar una probabilidad?, ¿conviene usar la representación porcentual para realizar las comparaciones?, ¿por qué?”.

Referencias

Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2018). Prueba Única Nacional del Concurso de Ascenso de la escala en la Carrera Pública Magisterial 2018. https://evaluaciondocente.perueduca.pe/concursoascenso2018/ascensoinstrumentos/pdfs/ASCENSO/A14-EBRS-32%20VERSION%202/A14-EBRS-32-MATEMATICA-%20VERSION%202.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2019). Prueba Única Nacional del Concurso de Ascenso de la escala en la Carrera Pública Magisterial 2019. https://evaluaciondocente.perueduca.pe/ascenso2019instrumentos/pdfs_cuadernillos/A14-EBRS-32_EBR%20SECUNDARIA%20MATEMATICA_FORMA%202.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2020). *RVM N.º 094-2020-MINEDU.* https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/662983/RVM_N__094-2020-MINEDU.pdf